# Aksioma paralelnosti

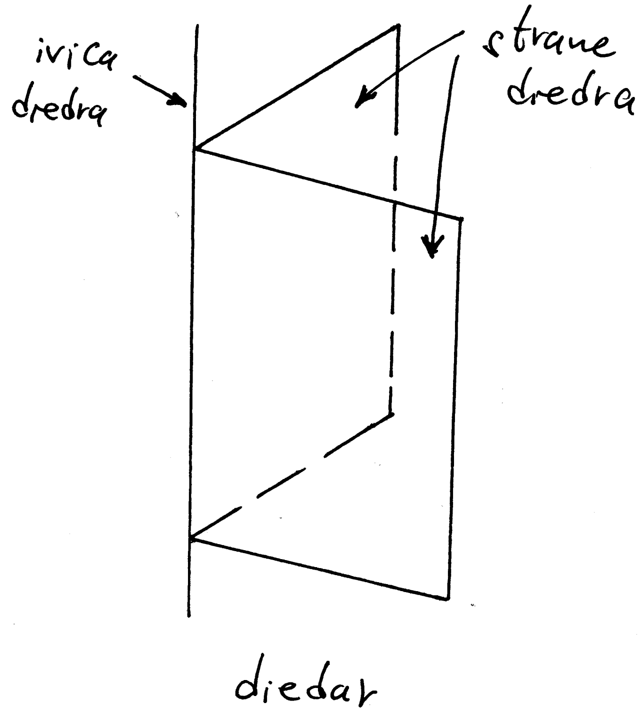
Još od doba starih grka pa sve do 19 vijeka postavljalo se pitanje koliko je pravih koje sadrže tačku $A$ a ne sijeku pravu $a$ $(A \notin a)$. Tek je u 19 vijeku postalo jasno da se ovaj problem ne može riješiti na osnovu do tada poznatih aksioma i njihovih posljedica. Problem je riješen tako što je uvedena nova aksioma - aksioma paralelnosti. To je aksioma koja čini V grupu aksioma.

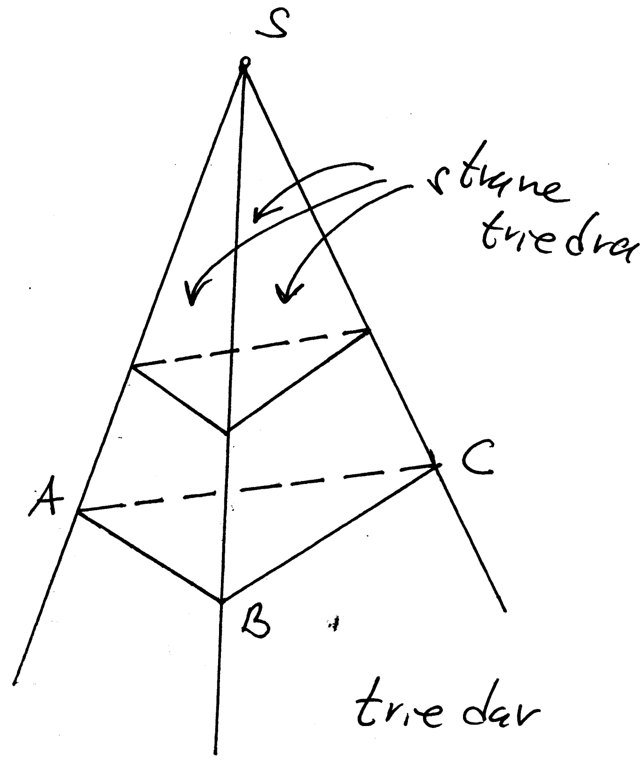
$V_E$ Za svaku pravu $a$ i za svaku tačku $A$ koja ne pripada pravoj $a$ postoji jedna i samo jedna prava $b$ koja sadrži tačku $A$ a ne siječe pravu $a$.

Neka su $a$ i $b$ komplanarne prave. Kažemo da je prava $a$ <u>paralelna</u> sa pravom $b$ i to zapisujemo ovako $a \parallel b$ ako je $a \cap b = \emptyset$ ili je $a \equiv b$.

## Diedar

Diedar je skup od dvije poluravni čija je ivica zajednička prava. Ta prava se zove ivica diedra a poluravni su strane diedra.




## Triedar (trostrani poliedarski ugao)

Triedar je geom. tijelo napravljeno od tri poluprave koje imaju početak u istoj tački i ne leže u jednoj ravni. Uglovi koje obrazuju po dvije od ovih polupravih nazivaju se ivični uglovi ili strane triedra

## Tetraedar – trostrana piramida

## Poliedar

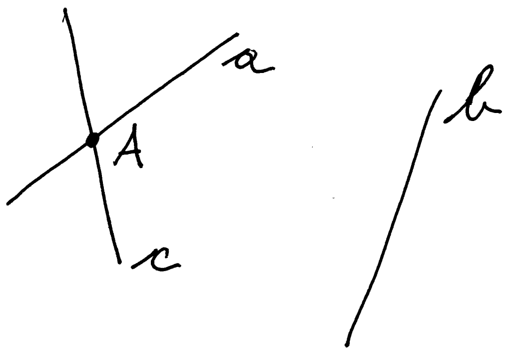
Opisna definicija: Poliedar je geometrisko tijelo trodimenzionalnog Euklidskog prostora ograničeno površima ravnih mnogouglova.

# Date su tri komplanarne prave $a, b, c$. Ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$ tada je $a \parallel c$. Dokazati

Rj.:

Ako prava $a$ nije paralelna sa pravom $c$, kako su $a$ i $c$ u istoj ravni to postoji tačka $A$ takva da

$$\{A\} = a \cap c$$



Sada tačka $A$ sadrži dvije različite prave koje su paralelne sa pravom $b$ #kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

Prema tome mora biti $a \parallel c$.

(#) Neka su $a$, $b$ i $c$ tri prave prostora od kojih su svake dvije komplanarne. Tada: Ako se dvije od njih sijeku i treća sadrži tu presječnu tačku, a ako su dvije od njih paralelne i treća je paralelna sa svakom od ovih pravih. Dokazati.

Rj.

Kako su svake dvije prave komplanarne neka je

$$a, b \subseteq \alpha$$
$$a, c \subseteq \beta$$
$$b, c \subseteq \gamma$$

Primjetimo da odavde odmah slijedi da

$$\alpha \cap \beta = a, \quad \alpha \cap \gamma = b, \quad \beta \cap \gamma = c$$

1° Pretpostavimo da se prave $a$ i $b$ sijeku u tački $A$ tj. $a \cap b = \{A\}$. Tada

$$\left.\begin{array}{l} A \in a \text{ i } a \subseteq \beta \Rightarrow A \in \beta \\ A \in b \text{ i } b \subseteq \gamma \Rightarrow A \in \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \beta \cap \gamma = c$$

$A \in c$. Slično bi pokazali i za $a \cap c = \{A\}$ ili za $b \cap c = \{A\}$.

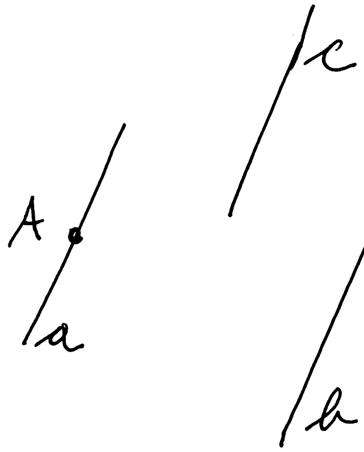
2° $a \parallel b \Rightarrow$ ako bi $a \cap c = \{A\}$, prema prvom dijelu zadatka bi imali $A \in b$ tj. $a \cap b = \{A\}$

Prema tome $a \parallel c$.

#kontradikcija (sa $a \parallel b$)

(#) Neka su $a$, $b$ i $c$ tri prave u prostoru. Ako je $a \parallel b$ i $b \parallel c$ tada je $a \parallel c$. Dokazati.

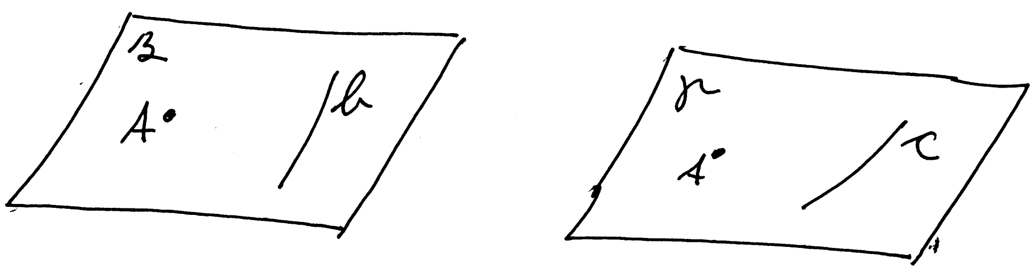
Rj.




Uzmimo na pravoj $A$ tačku $A$, i neka su $\beta$ i $\gamma$ dvije ravni takve da

$$A \in \beta \text{ i } b \subseteq \beta$$

$$\text{i } A \in \gamma \text{ i } c \subseteq \gamma.$$




Kako je $A \in \beta \wedge \gamma$ ($A \in \beta$ i $A \in \gamma$) to $\exists a'$ t.d.

$$a' = \beta \wedge \gamma$$

Sada su: $a'$ i $b$ komplanarne (jer pripadaju ravni $\beta$)
$a'$ i $c$ komplanarne (jer pripadaju ravni $\gamma$)
$b$ i $c$ komplanarne (jer su paralelne)

Dakle imamo tri prave u prostoru $a'$, $b$, $c$ od kojih su svake dvije komplanarne i $b \parallel c$. Na osnovu prethodnog zadatka $a' \parallel b$ i $a' \parallel c$.

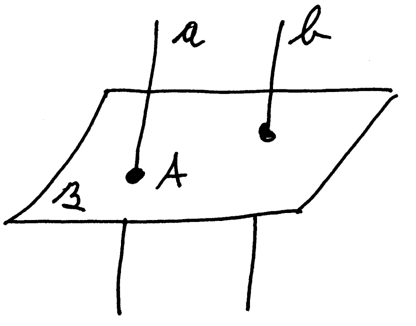
Ako bi $a$ i $a'$ bile dvije različite prave tada bi tačka $A$ sadržavala dvije prave $a$ i $a'$ od koje su obe paralelne su pravom $b$ # kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

$\Rightarrow a \parallel c$ q.e.d.

Prava $a$ je <u>paralelna</u> sa ravni $\alpha$ ako je ona paralelna sa svojom normalnom projekcijom na tu ravan. To zapisujemo ovako $a \parallel \alpha$.

# Ako jedna od dvije paralelne prave siječe ravan siječe je i druga. Dokazati.

Rj: Neka je $a \parallel b$ i pretpostavimo da prava $a$ siječe ravan $\beta$ u tački $A$.

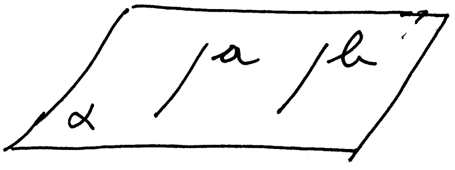



$a \parallel b$, $\beta$ : $\beta \cap a = \{A\}$

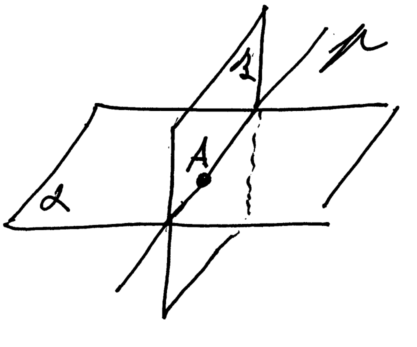
Trebamo dokazati da i prava $b$ siječe ravan $\beta$.

Pretpostavimo SUPROTNO, tj. predpostavimo da $b$ ne siječe $\beta$. Kako su $a$ i $b$ paralelne one određuju neku ravan $\alpha$

$a \parallel b$ $\quad \alpha$

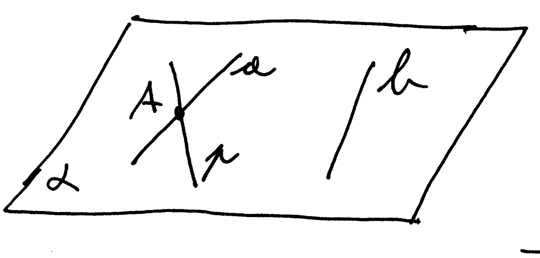



$A \in \alpha$ i $A \in \beta \Rightarrow \exists!\, p = \alpha \cap \beta$




Kako $b$ ne siječe $\beta$ to $b \cap p = \emptyset$.

Sada u ravni $\alpha$ postoje dvije prave $a$ i $p$ od kojih svaka sadrži tačku $A$ a ne siječe pravu $b$




#kontradikcija (sa aksiomom paralelnosti)

$\Rightarrow b$ siječe ravan $\beta$

Prava a je normalna (okomita) na ravan $\alpha$ ako ona siječe ravan u nekoj tački A i ako je okomita (normalna) na svaku pravu iz ravni $\alpha$ koja sadrži tačku A. To zapisujemo ovako $a \perp \alpha$.

#̌ Ako je jedna od dvije paralelne prave normalna na ravan normalna je i druga. Dokazati.

## SPISAK AKSIOMA

### **Euklidska geometrija**

#### I Aksiome incidencije (pripadanja)

$I_1$ Za svake dve tačke $A$ i $B$ postoji prava $a$ koja je incidentna i sa tačkom $A$ i sa tačkom $B$.

$I_2$ Za svake dve tačke $A$ i $B$ postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka $A$ i $B$.

$I_3$ Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

$I_4$ Za svake tri tačke $A$, $B$, $C$ koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka $A$, $B$, $C$.

Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

$I_5$ Za svake tri tačke $A$, $B$, $C$ koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tih tačaka.

$I_6$ Ako su dve tačke prave $a$ incidentne sa ravni $\alpha$, tada je svaka tačka prave $a$ incidentna sa ravni $\alpha$.

$I_7$ Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni $\alpha$ i sa ravni $\beta$, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni $\alpha$ i sa ravni $\beta$.

$I_8$ Postoje bar četiri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

#### II Aksiome poretka

$II_1$ Ako je $(A - B - C)$, tada su $A$, $B$ i $C$ tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $(C - B - A)$.

$II_2$ Za svake dve tačke $A$ i $B$ postoji tačka $C$, takva da je $(A - B - C)$.

$\mathrm{II}_3$ Ako su $A$, $B$ i $C$ tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $(A - B - C)$, $(B - C - A)$, $(C - A - B)$.

$\mathrm{II}_4$ (**Pašova aksioma**) Neka su $A$, $B$, $C$ tri nekolinearne tačke i neka je $p$ prava koja je incidentna sa ravni $ABC$ i nije incidentna ni sa jednom od tačaka $A$, $B$, $C$. Ako važi relacija $(A - p - B)$, tada važi bar jedna od relacija $(B - p - C)$ i $(C - p - A)$.

## III Aksiome podudarnosti

$\mathrm{III}_1$ Za svaku polupravu $a'$ sa početnom tačkom $A'$ i svaku duž $AB$, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž $AB$ podudarna sa duži $A'B'$, $[AB] \cong [A'B']$.

$\mathrm{III}_2$ Ako je $[A'B'] \cong [AB]$ i $[A''B''] \cong [AB]$, tada je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

$\mathrm{III}_3$ Ako je $(A-B-C)$ i $(A'-B'-C')$ i ako je $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, tada je $[AC] \cong [A'C']$.

$\mathrm{III}_4$ Za svaku poluravan $\alpha'$ sa ivicom $p'$, za svaku polupravu $a' \subset p'$ sa početnom tačkom $O'$, za svaki ugao $ab$, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subset a'$ sa početnom tačkom $O'$, takva da je ugao $ab$ podudaran sa uglom $a'b'$, $\angle ab \cong \angle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

$\mathrm{III}_5$ Ako za trouglove $ABC$ i $A'B'C'$ važi da je $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, tada je i $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

## IV Aksiome neprekidnosti

$\mathrm{IV}_1$ (**Arhimedova aksioma**) Neka su $AB$ i $CD$ proizvoljne duži. Neka su tačke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ incidentne sa polupravom $AB$, tako da je

$$(A - A_1 - A_2), (A_1 - A_2 - A_3), (A_2 A_3 A_4), \ldots,$$

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong \ldots \cong [CD].$$

Tada postoji ceo pozitivan broj $n$, takav da je $(A_1 - B - A_n)$.

$\mathrm{IV}_2$ (Kantorova aksioma) Neka je dat beskonačan niz duži, takvih da je svaka duž sadržana u prethodnoj i ne postoji duž sadržana u svim dužima niza. Tada postoji tačka koja je sadržana u svim dužima toga niza.

## V Aksioma paralelnosti

$\mathrm{V}_E$ Za svaku pravu $a$ i svaku tačku $A$ koja nije incidentna sa pravom $a$, postoji u ravni $aA$ jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom $A$ i ne seče pravu $a$.

## Hiperbolična geometrija (Geometrija Lobačevskog)

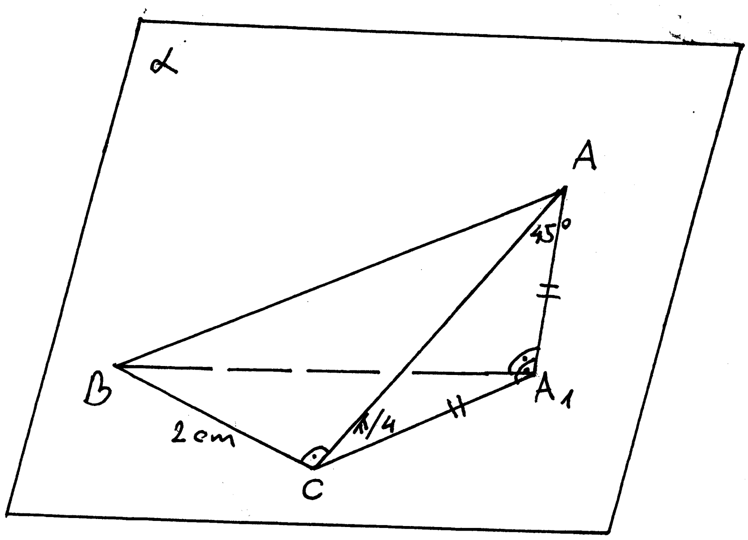
U hiperboličnoj geometriji su aksiome incidencije, poretka, podudarnosti i neprekidnosti iste kao u Euklidskoj geometriji. Razlika je jedino u aksiomi paralelnosti.

$\mathrm{V}_L$ (Aksioma Lobačevskog) Za svaku pravu $a$ i svaku tačku $A$ koja nije incidentna sa pravom $a$, postoje u ravni $aA$ bar dve prave koje su incidentne sa tačkom $A$ i ne seku pravu $a$.

# Elementarni zadaci iz euklidskog prostora

(#) Pravougli trougao $\Delta ABC$, sa pravim uglom kod tjemena $C$, naslanja se katetom $BC$ na ravan $\alpha$ i nagnut je prema ravni pod uglom od $\frac{\pi}{4}$. Odrediti odstojanje tjemena $A$ od ravni $\alpha$, ako je $BC = 2\,cm$ i $AB : AC = 3 : 1$.

Rj.




Ako sa $A_1$ označimo ortogonalnu projekciju tačke $A$ na ravan $\alpha$, u zadatku se traži da odredimo dužinu $AA_1$.

$\Delta AA_1C$ pravougli i $\sphericalangle ACA_1 = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle CAA_1 = 45^\circ$

$\Rightarrow AA_1 \cong A_1C \Rightarrow AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 = 2\,AA_1^2$

$AC = \sqrt{2}\,AA_1 \Rightarrow AA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$ ...(1)

$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{1} \Rightarrow AB = 3AC$

$\Delta ABC$ pravougli $\Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2 = 9AC^2 - AC^2$

$BC^2 = 8AC^2$

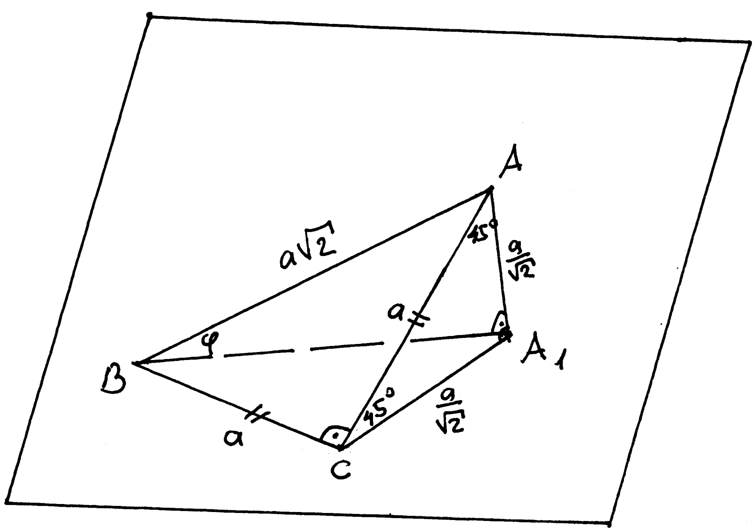
$BC = 2 \Rightarrow BC^2 = 4$

$\Rightarrow 8AC^2 = 4 \Rightarrow AC^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \xRightarrow{(1)} AA_1 = \frac{1}{2}$

(#) Nastavak prethodnog zadatka.

Odrediti ugao $\varphi$ između hipotenuze i ravni $\alpha$.

Rj.

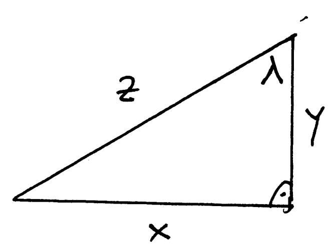



$\Delta ABC$ jkk pravougli

$$AB^2 = a^2 + a^2$$

$$AB = a\sqrt{2}$$

Kako glasi definicija sinus ugla pravouglog trougla?




$$\sin\lambda = \frac{x}{z}$$

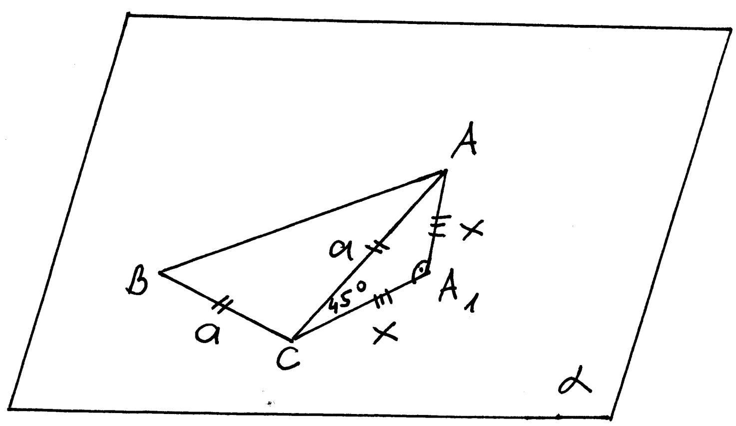
$$\cos\lambda = \frac{Y}{z}$$

Prema tome $\sin\varphi = \dfrac{AA_1}{AB} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

(#) Jedna od kateta jednakokrakog pravouglog trougla $\Delta ABC$ ($AC$ i $BC$ su katete, $AB$ hipotenuza) nalazi se u ravni $\alpha$, a druga je nagnuta prema ravni pod uglom od $45°$. Ako je $A_1$ ortogonalna projekcija tačke $A$ na ravan $\alpha$, a stranica $BC$ ima dužinu $a$, izračunati dužine stranica trougla $\Delta ACA_1$.

Rj.




$\Delta ABC$ jkk $\overset{BC=a}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow AC=a$.

$A_1$ ortogonalna projekcija

$\Rightarrow AA_1 \perp CA_1$

Zbir uglova u $\Delta AA_1C$ je $180°$ $\Rightarrow \sphericalangle CAA_1 = 45°$.

$\Delta AA_1C$ jkk pravougli pa prema Pitagorinoj teoremi

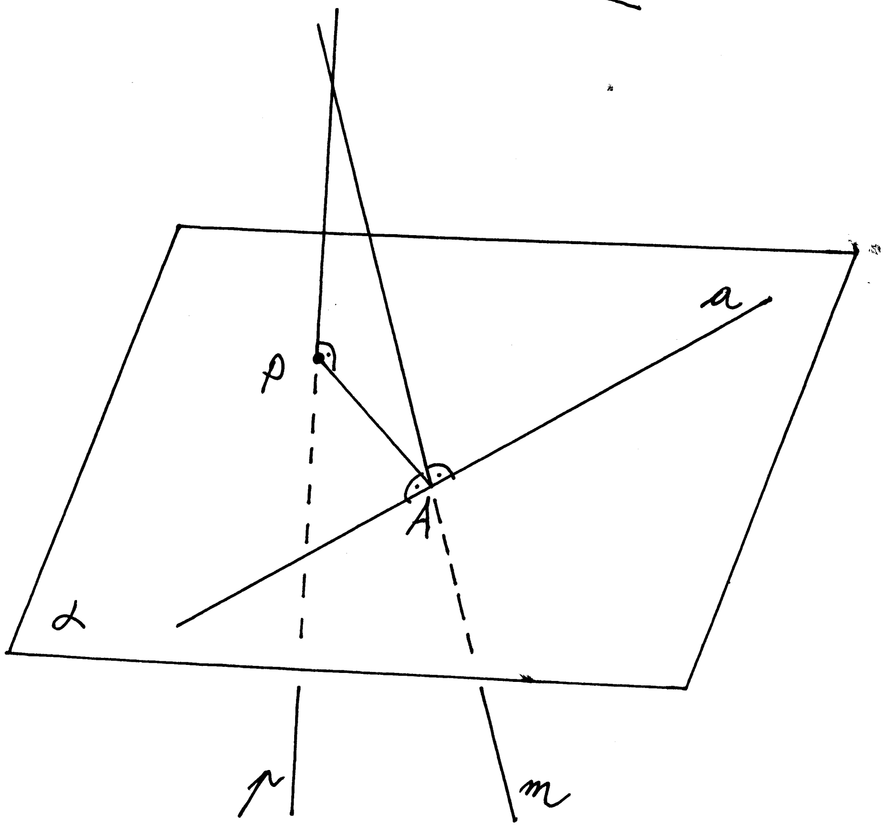
$$a^2 = x^2 + x^2$$

$$2x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Dužine stranica $\Delta ACA_1$ su $AC=a$, $CA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $AA_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

# Teorema o tri normale

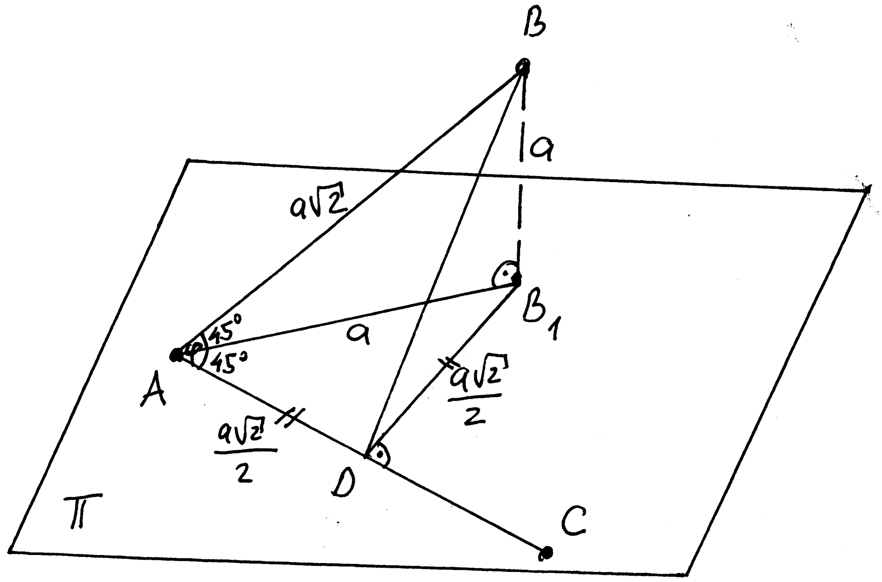



Neka je P tačka u ravni t.d. $P \notin a$.

Neka je data ravan $\alpha$ i prava $a$ u toj ravni. Ako je prava $p$ normalna na ravan $\alpha$ u tački $P$ (vidi sliku) i ako je $A$ podnožje normale iz tačke $P$ na pravu $a$, tada je svaka prava $m$, koja sadrži tačku $A$ i siječe pravu $p$, normalna na pravoj $a$ (važi i obrnuta teorema).

(#) Duž AB je nagnuta prema ravni $\pi$ pod uglom od $45°$. Druga duž, duž AC, leži u ravni $\pi$ i sa projekcijom duži AB određuje ugao od $45°$. Izračunati ugao $\measuredangle BAC$.

Rj.




Neka je $AB_1$ projekcija duži AB na ravan $\pi$. Primjetimo da je $\Delta ABB_1$ pravougli (ZAŠTO?), a kako je $\measuredangle BAB_1 = 45°$

$\Rightarrow \measuredangle ABB_1 = 45° \Rightarrow \Delta ABB_1$ jkk pravougli.

Pa ako stranicu $AB_1$ označimo sa a imamo da $BB_1 = a$

$\Rightarrow AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$.

Sad odredimo tačku D na pravoj AC, tako da je $B_1D \perp AC$. Primjetimo da je trougao $\Delta ADB_1$ jkk pravougli (ZAŠTO?)

$\Rightarrow AD = DB_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ZAŠTO?).

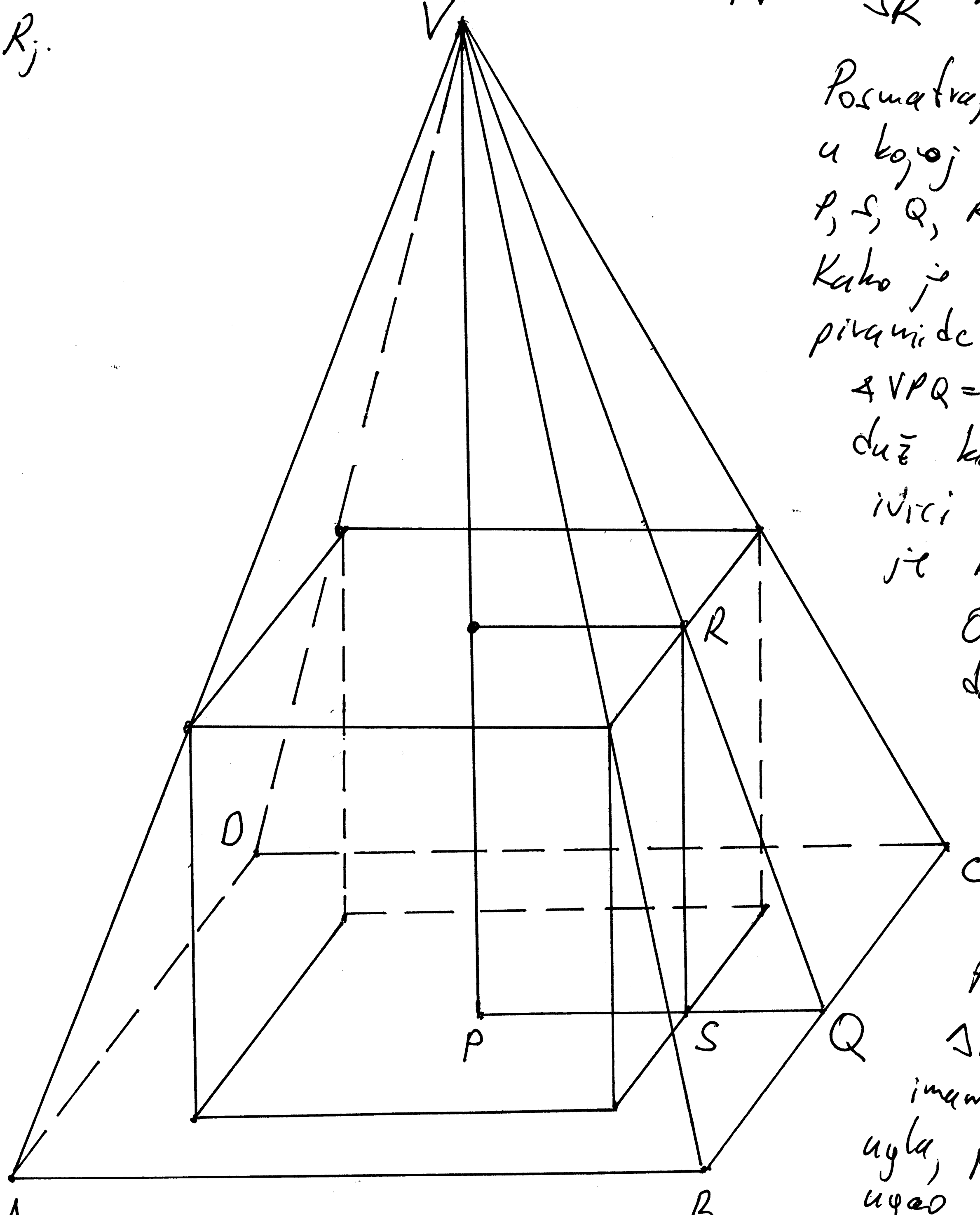
Sad ako posmatramo prave $p(A,C)$, $p(B_1,D)$, $p(B,B_1)$

Prema teoremi o tri normale slijedi da je $BD \perp AC$.

$\Delta ABD$ pravougli $\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$.

# U pravilnu četverostranu piramidu upisana je kocka, čija jedna strana leži u osnovi piramide, a ivice njoj naspramne strane pripadaju bočnim stranama piramide (vidi sliku). Pokazati da je $\frac{PQ}{PV} = \frac{SQ}{SR}$.

Rj.




Posmatrajmo ravan u kojoj su tačke $P, S, Q, R, V$.
Kako je $PV$ visina piramide to je $\measuredangle VPQ = 90^\circ$. $SR$ je duž koja pripada ivici kocke pa je $RS \perp PQ$.
Odavde vidimo da je

$$p(P,V) \parallel p(R,S)$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle QRS \cong \measuredangle QVP = \lambda$$

Primjetimo da u $\Delta PQV$ i $\Delta SQR$ imamo dva podudarna ugla, pa je i treći ugao podudaran.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle VPQ \cong \measuredangle RSQ = 90^\circ \\ \measuredangle QVP \cong \measuredangle QRS = \lambda \\ \measuredangle PQV \cong \measuredangle SQR \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{slič. UUU}} \Delta PQV \sim \Delta SQR$$

$$\Downarrow$$

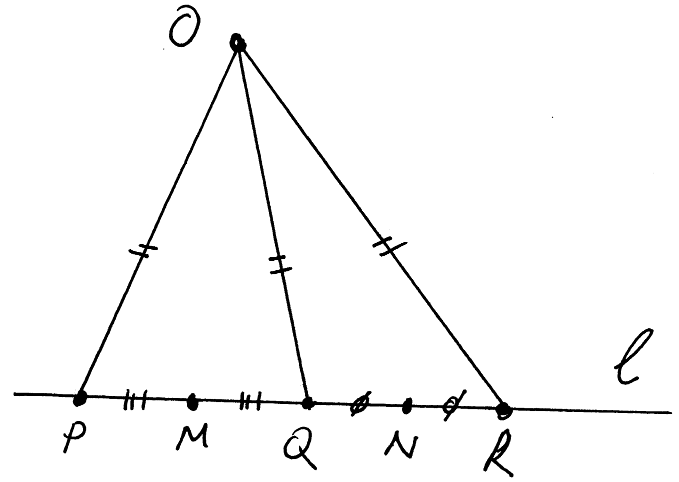
$$\frac{PQ}{SQ} = \frac{PV}{SR} \Rightarrow \frac{PQ}{PV} = \frac{SQ}{SR} \text{ q.e.d.}$$

# Razni zadaci

(#) Data je prava $l$ i tri tačke $P, Q, R \in l$ takve da je $P-Q-R$. Dokazati da ne postoji tačka $O \notin l$ takva da su trouglovi $\Delta PQO$ i $\Delta OQR$ jkk, redom sa osnovicama $PQ$ i $QR$.

jednakokraki

Rj.




Drugim riječima trebamo dokazati da ne postoji tačka $O$ takva da $O \notin l$ i $OP \cong OQ \cong OR$.

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da takva tačka postoji. Neka su $M$ i $N$ sredine duži $PQ$ i $QR$ redom.

Tada imamo $\measuredangle PMO \cong \measuredangle QMO$ i $\measuredangle QNO \cong \measuredangle RNO$ (ZAŠTO?)

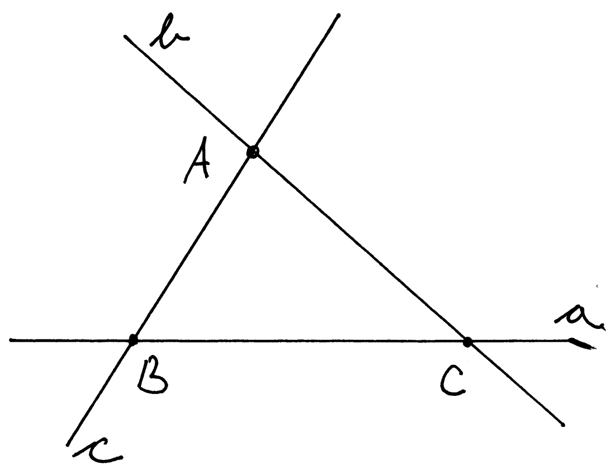
pa je $OM \perp PQ$ i $ON \perp QR$

#kontradikcija
(sa teoremom o jedinstvenosti normale iz date tačke na datu pravu)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Data tačka $O$ ne postoji.

(#) Skup pravih ima osobinu da se svake dvije prave iz tog skupa sijeku. Ako sve prave iz tog skupa ne prolaze kroz istu tačku dokazati da sve one pripadaju istoj ravni.

Rj. Pretpostavimo da postoje tri prave $a$, $b$ i $c$ koje zadovoljavaju uslove zadatka, a ne prolaze kroz istu tačku




Neka je
$b \cap c = \{A\}$
$a \cap c = \{B\}$
$a \cap b = \{C\}$

Tačke $A$, $B$ i $C$ su nekolinearne (ZAŠTO?) i određuju ravan $\alpha$.

Sad primjetimo da

$B, C \in \alpha, \quad p(B,C) \equiv a \quad \Rightarrow \quad a \subseteq \alpha$

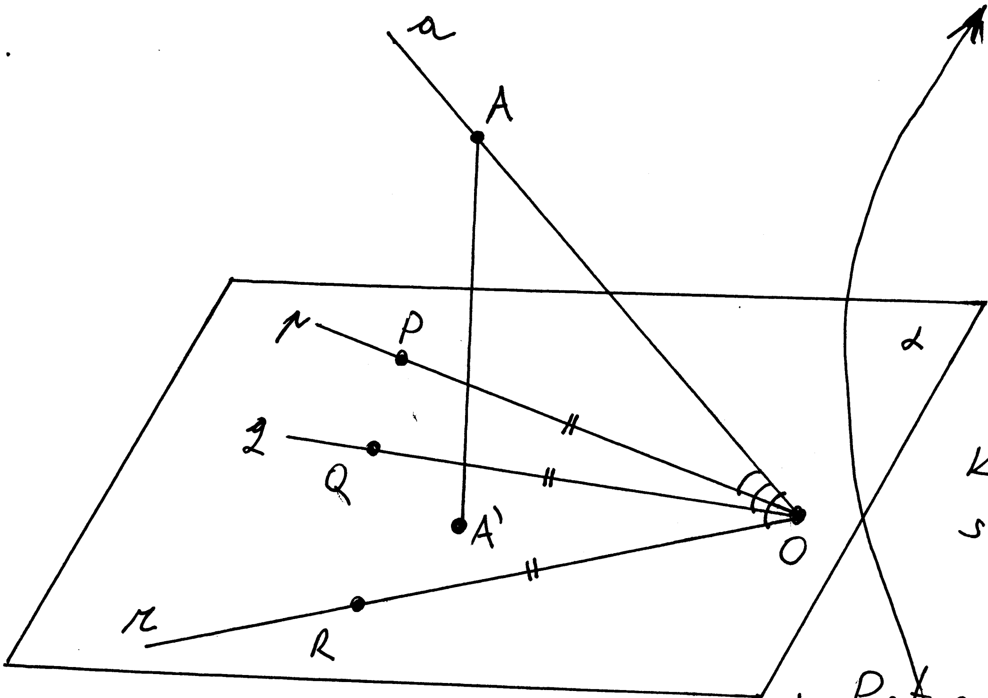
$A, C \in \alpha, \quad p(A,C) \equiv b \quad \Rightarrow \quad b \subseteq \alpha$

$A, B \in \alpha, \quad p(A,B) \equiv c \quad \Rightarrow \quad c \subseteq \alpha$

Neka je $m$ proizvoljna prava iz navedenog skupa. Kako prava $m$ siječe pravu $a$ i pravu $b$ i pravu $c$, koje nemaju zajedničku tačku ($a \cap b \cap c = \emptyset$), onda sa ravni $\alpha$ ima bar dvije zajedničke tačke, odakle slijedi $m \subseteq \alpha$. Prema tome, sve prave pripadaju ravni $\alpha$.

# Prava $a$ siječe ravan $\alpha$ u tački $O$ i pri tome obrazuje podudarne uglove sa tri prave koje prolaze kroz tačku $O$ i leže u ravni $\alpha$. Dokazati da je prava $a$ normalna na ravan $\alpha$.

Rj.




Neka su $p$, $q$ i $r$ tri prave u ravni $\alpha$ koje prolaze kroz tačku $O$ i pri tome je $\sphericalangle ap = \sphericalangle aq = \sphericalangle ar$. Neka su $P$, $Q$ i $R$ redom tačke na pravima $p$, $q$ i $r$ za koje vrijedi $PO \cong QO \cong RO$. Primjetimo da tačke $P$, $Q$ i $R$ pripadaju krugu sa centrom u tački $O$ poluprečnika $PO$. Neka je $A$ proizvoljna tačka na pravoj $a$ i neka je $A'$ njena ortogonalna projekcija na ravan $\alpha$. Ako prava $a$ nije normalna na ravan $\alpha$ tada $O \neq A'$. Ako posmatramo trouglove $\Delta APO$, $\Delta AQO$, $\Delta AQR$ iz podudarnosti SUS imamo $\Delta APO \cong \Delta AQO \cong ARO$ iz čega slijedi $AP \cong AQ \cong AR$. Dalje, kako je $p(A,A') \perp \alpha$, iz pravouglih trouglova $\Delta AA'P$, $\Delta AA'Q$, $\Delta AA'R$ slijedi $A'P \cong A'Q \cong A'R$.

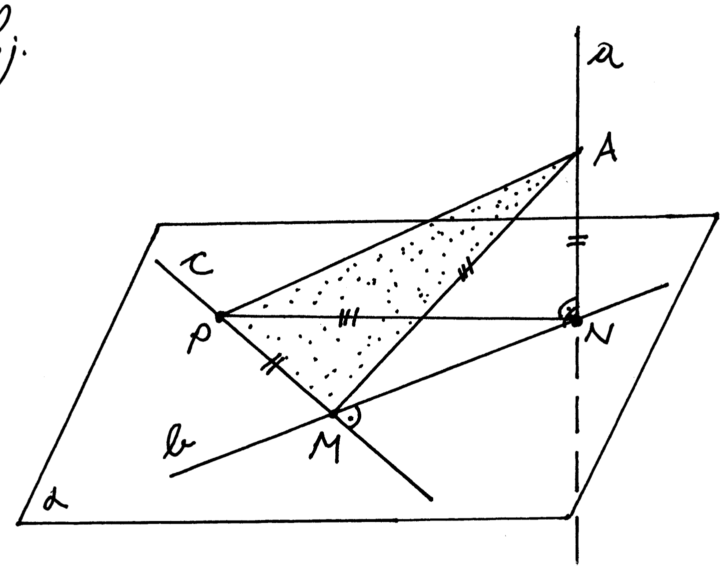
nastavak: Sad kako je $A'P \cong A'Q$ to $A' \in$ simetrali stranice $PQ$, iz $A'R \cong A'Q \Rightarrow A' \in$ simetrali $QR$ i iz $A'P \cong A'R \Rightarrow A' \in$ simetrali $PR$. Kako se simetrale $\Delta PQR$ sijeku u istoj tački to $O \equiv A'$ #kontradikcija.

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $a \perp \alpha$.

# Prava $a$ je normalna na ravan $\alpha$ i siječe je u tački $N$. Neka je $b$ proizvoljna prava ravni $\alpha$ incidentna sa tačkom $N$. Ako je $M$ $(M \neq N)$ tačka prave $b$, i $c$ prava ravni $\alpha$ koja sadrži tačku $M$ i normalna je na pravu $b$, tada je prava $c$ normalna na pravu $p(M,A)$, gdje je $A$ proizvoljna tačka prave $a$. Dokazati.

Napomena: Ova tvrdnja je poznata pod imenom Teorema o tri normale.

Rj.




$a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = \{N\}$
$b$ proizv. prava, $N \in b$
$c \perp b$, $M \in b$, $M \in c$
$A$ proizv. tačka $\in a$

$\Rightarrow p(M,A) \perp c$.

Rješenje 1

Izaberimo tačku $P$ na pravoj $c$ takvu da $MP \cong AN$, i posmatrajmo trouglove $\triangle MNA$ i $\triangle NMP$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong PM \\ \measuredangle ANM \cong \measuredangle NMP = 90^\circ \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{podud. SUS}} \triangle MNA \cong \triangle NMP$$

$$\Downarrow$$

$$NP \cong MA$$

Sad posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle ANP$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong AN \\ MA \cong PN \\ AP \cong AP \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{pod SSS}} \triangle AMP \cong \triangle PNA$$

$$\Downarrow$$

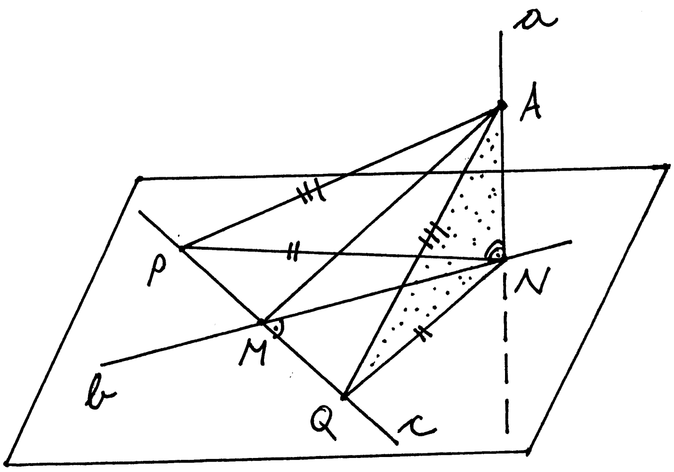
$$\sphericalangle PMA \cong \sphericalangle PNA.$$

Kako je $\sphericalangle ANP$ = prav ugao (ZAŠTO?) to je

$\sphericalangle AMP$ = prav ugao

q.e.d.

<u>Rešenje 2</u>




Izaberimo tačke $P$ i $Q$ na pravoj $c$, tako da je $M$ sredina duži $PQ$. Posmatrajmo trouglove $\triangle MNP$ i $\triangle MNQ$.

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QM \\ \sphericalangle NMP \cong \sphericalangle NMQ = 90^\circ \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{SUS}} \triangle MNP \cong \triangle MNQ$$

$$\Downarrow$$

$$PN \cong NQ$$

Sad posmatrajmo trouglove $\triangle PNA$ i $\triangle QNA$. Imamo

$$\left.\begin{array}{l} PN \cong QN \\ \sphericalangle PNA \cong \sphericalangle QNA = 90^\circ \\ AN \cong AN \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{podud. SUS}} \triangle PNA \cong \triangle QNA$$

$$\Downarrow$$

$$PA \cong QA$$

Na kraju posmatrajmo trouglove $\triangle AMP$ i $\triangle AMQ$

$$\left.\begin{array}{l} PM \cong QM \\ PA \cong QA \\ AM \cong AM \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{podud. SSS}} \triangle PMA \cong \triangle QMA$$

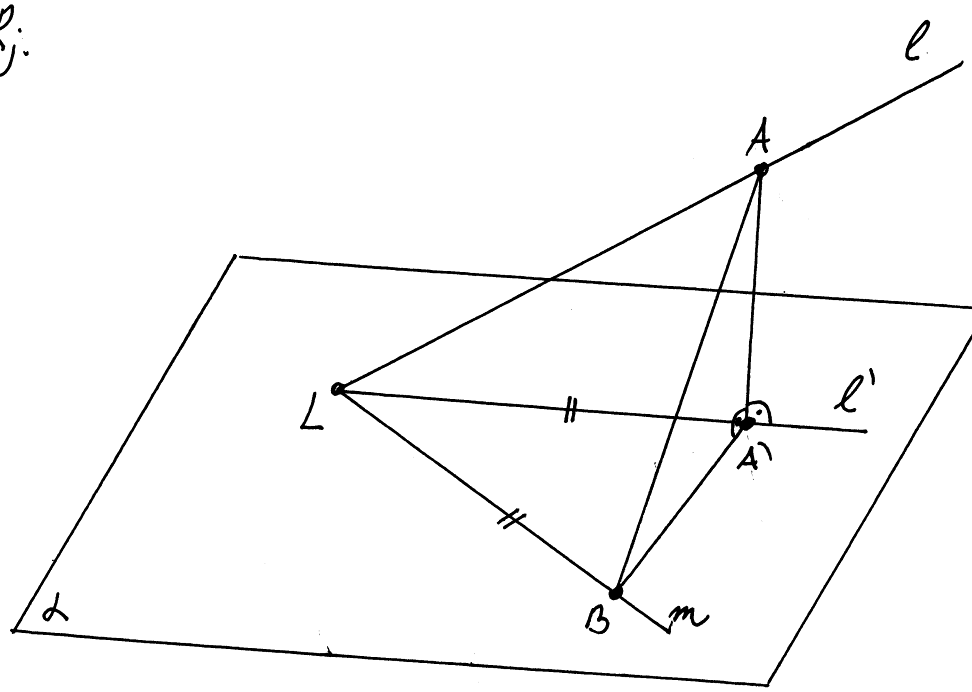
$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle PMA \cong \sphericalangle AMQ.$$

Kako su ovo dva naporedna ugla to je $p(A,M) \perp c$ q.e.d.

(#) Neka je $l$ prava koja nije normalna na ravan $\alpha$ i siječe je u tački $L$. Od svih pravih ravni $\alpha$ koje prolaze kroz tačku $L$, najmanji ugao sa pravom $l$ obrazuje njena ortogonalna projekcija na ravan $\alpha$. Dokazati.

Rj.




tada je $l' = p(L, A')$ normalna projekcija poluprave $l$ na ravan $\alpha$

Neka je $A$ proizvoljna tačka poluprave $l$, i neka je $A'$ njena ortogonalna projekcija na ravan $\alpha$ (ZAŠTO? – $A, L, A'$ su nekolinearne tačke, one određuju neku ravan $\beta$, $l' \subseteq \alpha \cap \beta$). Neka je dalje $m$, $m \neq l'$ proizvoljna poluprava ravni $\alpha$, čiji je početak tačka $L$. Trebamo dokazati da je $\measuredangle ALm > \measuredangle ALl'$.

Obilježimo sa $B$ tačku poluprave $m$ takvu da je $LB \cong LA'$.

Kako je $p(A, A') \perp \alpha$ to je $\measuredangle AA'B = 90°$ pa je $AB > AA'$.

Sada se prisjetimo sljedeće teoreme iz EG1:

Teo. Ako za trouglove $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ važi $AB \cong A_1B_1$ i $AC \cong A_1C_1$ tada $BC > B_1C_1$ akko $\measuredangle BAC > \measuredangle B_1A_1C_1$.

Sad ako posmatramo trouglove $\triangle ALA'$ i $\triangle ALB$ kako je $AL \cong AL$, $LA' \cong LB$ i $AB > AA'$ prema navedenoj teoremi $\measuredangle ALB > \measuredangle ALA'$ q.e.d.

# Euklidski prostor

-zadaci posuđeni iz knjige:
Problemi iz geometrije (metodička zbirka zadataka);
Ratko Tošić, Vojislav Petrović;
Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu-

# *Ugao između mimoilaznih pravih* $a$ i $b$ definiše se kao ugao između pravih $a'$ i $b'$ koje se seku i pri tome je $a' \parallel a$ i $b' \parallel b$. Dokazati da ugao između mimoilaznih pravih $a$ i $b$ ne zavisi od izbora pravih $a'$ i $b'$, tj. da su svi tako dobijeni uglovi međusobno podudarni.

# Prava je normalna na ravan ako i samo ako je normalna na dve prave te ravni koje se seku. Dokazati.

**Uputa:**

Iskoristiti definiciju normalnosti prave i ravni i prethodni zadatak.

#3. Data je prava $a$ i na njoj tačka $M$. Dokazati da sve prave koje su incidentne sa tačkom $M$ i normalne na pravu $a$, pripadaju istoj ravni.

**Uputa:**

Neka su prave $m$ i $n$ normalne na pravu $a$ u tački $M$. Dokazati da sve normale povučene na pravu $a$ u tački $M$, pripadaju ravni $mn$.

# Tri prave $m$, $n$ i $p$ seku ravan $\alpha$ u tački $A$. Ako su uglovi koje prave $m$, $n$ i $p$ obrazuju sa ravni $\alpha$ međusobno podudarni, tada te prave ne mogu biti komplanarne. Dokazati.

Rj.

Neka je $l$ prava normalna na ravan $\alpha$ u tački $S$. Obeležimo sa $M$, $N$ i $P$ tačke polupravih $m, n$ i $p$, redom, takve da je $|SM| = |SN| = |SP|$, a sa $M'$, $N'$ i $P'$ njihove ortogonalne projekcije na pravu $l$. Iz podudarnosti trouglova $SMM'$, $SNN'$ i $SPP'$ sledi $|SM'| = |SN'| = |SP'|$, odnosno $M' \equiv N' \equiv P' \equiv L$. Kako tačke $M$, $N$, $P$ i $L$ pripadaju jednoj ravni koja je normalna na pravu $l$ (preth. zad.), one pripadaju kružnici sa centrom u tački $L$.

Pretpostavimo sada da su prave $m$, $n$ i $p$ komplanarne. Tada je

$$r(m, n, p) \cap r(M, N, P, L) = p(M, N, P),$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da tačke $M$, $N$ i $P$ pripadaju jednoj kružnici.

\# Normalna projekcija oštrog (tupog) ugla na ravan koja je paralelna jednom njegovom kraku je oštar (tup) ugao. Dokazati.

**Uputa:**

Utvrditi najpre šta je ortogonalna projekcija pravog ugla na ravan koja je paralelna sa jednim njegovim krakom.

\# Rastojanje između mimoilaznih pravih $a$ i $b$ definiše se kao dužina duži $AB$, gde su $A$ i $B$ redom tačke preseka pravih $a$ i $b$ sa njihovom zajedničkom normalom. Ako je $X$ proizvoljna tačka prave $a$ i $Y$ - proizvoljna tačka prave $b$, dokazati da duž $XY$ nije manja od rastojanja između pravih $a$ i $b$.

**Uputa:**

Uočiti par paralelnih ravni koje su incidentne sa datim pravama.

\# U prostoru su date duži $AB$ i $CD$ koje ne leže u jednoj ravni. Ako su tačke $M$ i $N$ redom njihova sredine, dokazati da je

$$\frac{|AD|+|BC|}{2} > |MN| \,.$$

**Uputa:**

Posmatrati trougao $ADB'$, gde je $B' = \Sigma_N(B)$.

\# Date su tri prave od kojih su svake dve mimoilazne. Koliko ima pravih koje seku sve tri prave?

**Uputa:**

Beskonačno mnogo.

\# Dat je prostorni četvorougao $ABCD$ i tačke $P$, $Q$, $R$ i $S$, takve da $P \in p(A,B)$, $Q \in p(B,C)$, $R \in p(C,D)$ i $S \in p(D,A)$. Potreban i dovoljan uslov da tačke $P$, $Q$, $R$ i $S$ budu komplanarne je da važi

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA} = 1 \,.$$

Dokazati.

**Uputa:**

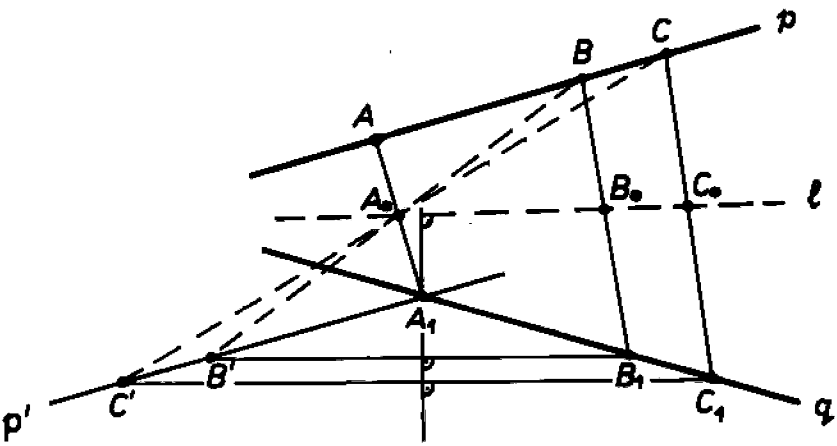
Uslov je potreban. Projektovati tačke $A$, $B$, $C$, $D$ na ravan određenu tačkama $P$, $Q$ ,$R$ i $S$.

(Teorema Hjelmsleva) U ravni su date prave $p$ i $p_1$, tačke $A$, $B$, $C$ na pravoj $p$ i tačke $A_1$, $B_1$, $C_1$ na pravoj $p_1$, pri čemu je $[AB] \cong [A_1B_1]$, $[BC] \cong [B_1C_1]$, $(A - B - C)$ i $(A_1 - B_1 - C_1)$. Dokazati da sredine duži $AA_1$, $BB_1$ i $CC_1$ pripadaju jednoj pravoj.

Rj. Neka su $A_0$, $B_0$ i $C_0$ redom sredine duži $AA_1$, $BB_1$ i $CC_1$ (sl. 22). Neka je, dalje, $p' = \sigma_{A_0}(p)$, $B' = \sigma_{A_0}(B)$ i $C' = \sigma_{A_0}(C)$. Kako je $\sigma_{A_0}(A) = A_1$, to je $[A_1B'] \cong [A_1B_1]$ i $[A_1C'] \cong [A_1C_1]$. Znači, trouglovi $A_1B'B_1$ i $A_1C'C_1$ su jednakokraki, pa su sredine osnovica $B'B_1$ i $C'C_1$ i tačka $A_1$ kolinearne tačke. (Zašto?) Prava $l$ koja je određena ovim tačkama je zajednička normala pravih $B'B_1$ i $C'C_1$.

Iz trougla $BB'B_1$ sledi

$$l \perp p(A_0, B_0) \quad \text{(zad. 92(b))}, \tag{1}$$




Sl. 22.

a iz trougla $CC'C_1$

$$l \perp p(A_0, C_0). \tag{2}$$

Kako je normala iz tačke $A_0$ na pravu $l$ jedinstvena, tačke $A_0$, $B_0$ i $C_0$ su kolinearne.

U prostoru su date prave $a$ i $b$. Neka su $M_1$, $M_2$, $M_3$ tačke prave $a$ i $N_1$, $N_2$, $N_3$ tačke prave $b$, takve da je $(M_1 - M_2 - M_3)$ i $(N_1 - N_2 - N_3)$. Ako je $[M_1M_2] \cong [N_1N_2]$ i $[M_2M_3] \cong [N_2N_3]$, tada sredine duži $M_1N_1$, $M_2N_2$ i $M_3N_3$ pripadaju jednoj pravoj. Dokazati.

**Uputa:**

Uporediti sa prethodnim zadatkom

\# Prava $l$ seče pljosni diedra u tačkama $A$ i $B$. Dokazati da prava $l$ obrazuje podudarne uglove sa pljosnima diedra ako i samo ako su rastojanja tačaka $A$ i $B$ od ivice diedra podudarna.

**Uputa:**

Neka tačka $A$ pripada pljosni $\alpha$, a tačka $B$ pljosni $\beta$ diedra $\angle \alpha s \beta$. Obeležimo sa $A_1$ normalnu projekciju tačke $A$ na ravan koja sadrži pljosan $\beta$, a sa $B_1$ normalnu projekciju tačke $B$ na ravan koja sadrži pljosan $\alpha$. Ako su $A_2$ i $B_2$ redom normalne projekcije tačaka $A$ i $B$, na pravu $s$ – ivicu diedra, dokazati prvo da su uglovi $AA_2A_1$ i $BB_2B_1$ kao uglovi normalnog preseka diedra – podudarni, a zatim da je $\angle ABA_1 \cong \angle BAB_1$, ako i samo ako je $[AA_2] \cong [BB_2]$.

\# Dokazati da prava obrazuje podudarne uglove sa pljosnima diedra ako i samo ako je paralelna sa simetralnom ravni njemu naporednog diedra.

**Uputa:**

Iskoristiti prethodni zadatak.

\# Neka je $S$ skup svih pravih koje seku svaku od tri mimoilazne prave $p_1$, $p_2$, $p_3$. Ako u skupu $S$ postoje tri prave koje seku neku četvrtu pravu $p_4$, tada sve prave iz $S$ seku pravu $p_4$ ili su s njom paralelne. Dokazati.

R.: Neka su $q_1$, $q_2$, $q_3$ tri prave skupa $S$ koje seku pravu $p_4$. Pokazaćemo da svaka prava $q_4$ iz skupa $S$ seče pravu $p_4$ ili je s njom paralelna.

Obeležimo sa $S_{ij}$ tačku preseka pravih $p_i$ i $q_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ (sl. 125). Budući da se prave $p_3$ i $q_3$, $p_3$ i $q_4$, $p_4$ i $q_3$ seku, one određuju tri ravni – $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$, redom. Prave određene stranicama prostornog četvorougla $S_{11}S_{21}S_{22}S_{12}$ seku ravan $\alpha$ u tačkama $S_{31}$, $S_{24}$, $S_{32}$, $S_{14}$ i ravan $\gamma$ u tačkama $S_{41}$, $S_{23}$, $S_{42}$, $S_{13}$. Na osnovu zadatka 1169, sledi

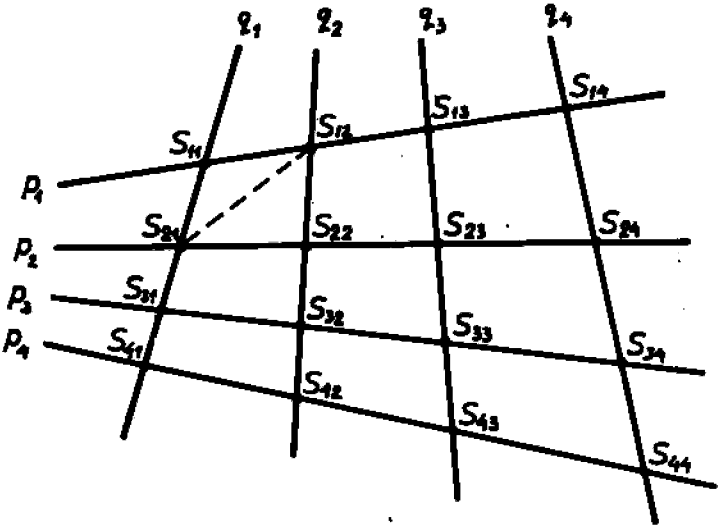
$$\frac{|S_{11}S_{31}|}{|S_{31}S_{21}|}\cdot\frac{|S_{21}S_{23}|}{|S_{23}S_{22}|}\cdot\frac{|S_{22}S_{32}|}{|S_{32}S_{12}|}\cdot\frac{|S_{12}S_{13}|}{|S_{13}S_{11}|}=1,$$

$$\frac{|S_{11}S_{31}|}{|S_{31}S_{21}|}\cdot\frac{|S_{21}S_{23}|}{|S_{24}S_{22}|}\cdot\frac{|S_{22}S_{32}|}{|S_{32}S_{12}|}\cdot\frac{|S_{12}S_{14}|}{|S_{14}S_{11}|}=1,$$

$$\frac{|S_{11}S_{41}|}{|S_{41}S_{21}|}\cdot\frac{|S_{21}S_{23}|}{|S_{23}S_{22}|}\cdot\frac{|S_{22}S_{42}|}{|S_{41}S_{12}|}\cdot\frac{|S_{12}S_{13}|}{|S_{13}S_{11}|}=1.$$

Deobom prve jednakosti proizvodom druge i treće dobijamo

$$\frac{|S_{11}S_{41}|}{|S_{41}S_{21}|}\cdot\frac{|S_{21}S_{24}|}{|S_{24}S_{22}|}\cdot\frac{|S_{22}S_{42}|}{|S_{42}S_{12}|}\cdot\frac{|S_{12}S_{14}|}{S_{14}S_{11}|}=1,$$




Sl. 125.

odakle sledi da tačke $S_{41}$, $S_{24}$, $S_{42}$ i $S_{14}$ pripadaju jednoj ravni. Stoga se prave $S_{41}S_{24}$ i $S_{14}S_{24}$, tj. prave $p_4$ i $q_4$ seku ili su paralelne.

Dat je triedar čije su sve pljosni oštrougle i čiji je jedan diedar prav. Dokazati da je presek toga triedra sa proizvoljnom ravni koja je normalna na bilo koju od ivica triedra - pravougli trougao.

R. Neka je $Sabc$ triedar u kojem je $\angle ab < 90°$, $\angle bc < 90°$, $\angle ca < 90°$ i $\angle a = 90°$. Svaka ravan normalna na ivicu $a$ očigledno seče triedar po pravouglom trouglu. Pokaćemo da to važi i za ravni normalne na ivicu $b$, odnosno ivicu $c$.

Neka je $\alpha$ ravan koja seče ivicu $b$ u tački $B$ i pri tome je $\alpha \perp b$. Presečne prave ravni $\alpha$ i ravni $ba$ i $bc$ su normalne na pravu $b$, a kako je $\angle ab < 90°$ i $\angle bc < 90°$, one seku ivice $a$ i $c$ u tačkama $A$ i $C$, redom. Pokazaćemo da je trougao $ABC$ pravougli.

Kako je $r(A,B,C) \perp b$ i $b \subset r(a,b)$, to je $r(A,B,C) \perp r(a,b)$. Iz uslova $\angle a = 90°$, sledi $r(a,c) \perp r(a,b)$, odakle je $r(A,B,C) \cap r(a,c) = p(A,C)$ i $p(A,C) \perp r(a,b)$. Otuda je $p(A,C) \perp p(A,B)$, tj. $\angle BAC = 90°$.

Za ravni normalne na ivicu $c$ dokaz je analogan.

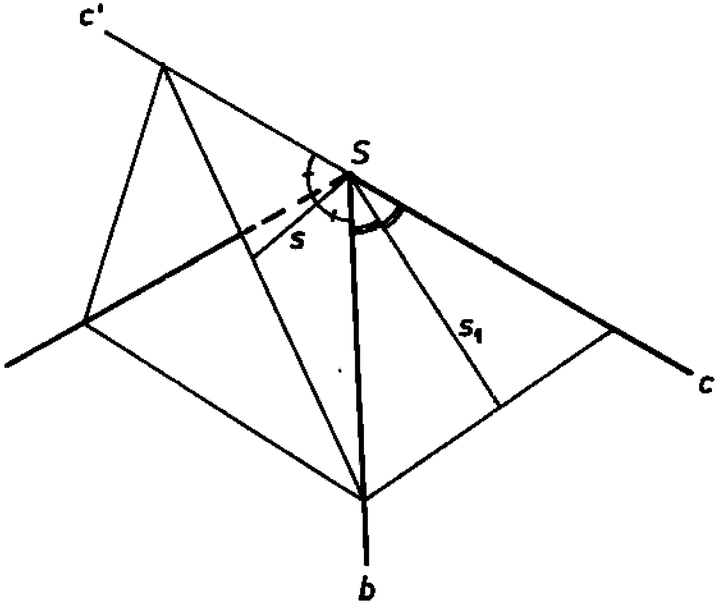
Dokazati da se tri ravni od kojih svaka sadrži po jednu ivicu triedra i simetralu naspramne pljosni seku se po jednoj pravoj.

**Uputa:**

Na ivicama $a$, $b$ i $c$ triedra $Sabc$ uočiti redom tačke $A$, $B$ i $C$, takve da je $|SA| = |SB| = |SC|$.

#) Dat je triedar $Sabc$ kod kojeg je $\angle ab + \angle ac = 180°$. Dokazati da je simetrala ugla $bc$ normalna na ivicu $a$.

R. Neka je poluprava $c'$ dopuna poluprave $c$ do prave. Kako je $\angle ab + \angle ac = 180°$, to je $\angle ac' = \angle ab$ (sl. 126). Otuda je ortogonalna projekcija ivice




Sl. 126.

$a$ na ravan $bc'$ simetrala ugla $bc'$. (Zašto?) Obeležimo tu simetralu sa $s$, a sa $s_1$ obeležimo simetralu ugla $bc$. Kako je $r(a,s) \perp r(b,c')$ i $s_1 \perp s$ (zašto?), to je $s_1 \perp r(a,s)$, iz čega sledi $s_1 \perp a$.

#) Dat je triedar koji nema pravouglih pljosni. Dokazati da se tri ravni, od kojih svaka sadrži po jednu ivicu triedra i normalna je na naspramnu pljosan, seku po jednoj pravoj.

**Napomena.** Prava po kojoj se seku ravni iz ovog zadatka zove se *visina triedra*.

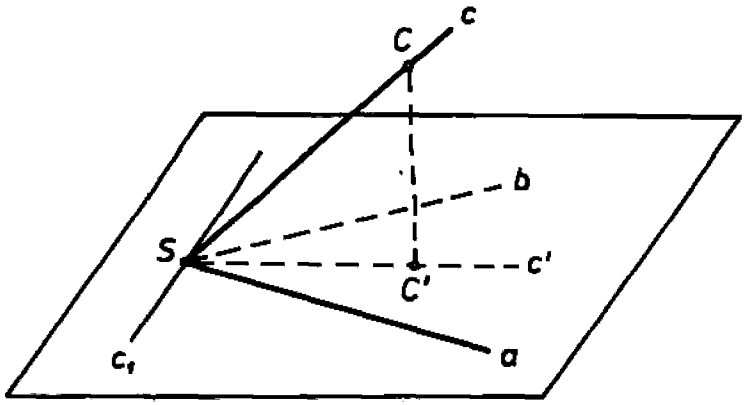
**Uputa:**

Obeležimo sa $A$, $B$ i $C$ tačke u kojima neka ravan $\pi$, normalna na ivicu $a$, seče redom ivice $a$, $b$ i $c$. Pokazati da ravni određene ivicama triedra, a koje su normalne na naspramne pljosni, seku ravan $\pi$ po pravama koje sadrže visine trougla $ABC$.

\# U svakoj od pljosni triedra koji nema pravouglih pljosni data je po jedna prava koja prolazi kroz vrh triedra i normalna je na naspramnu ivicu. Dokazati da takve tri prave pripadaju jednoj ravni.

R. Neka je $c_1$ poluprava sa početkom $S$ koja je normalna na ivicu $c$ i leži u ravni $ab$, određenoj ivicama $a$ i $b$ triedra $Sabc$. Obeležimo sa $C'$ ortogonalnu projekciju proizvoljne tačke $C$ ivice $c$ na ravan $r(a,b)$ (sl. 127). Kako je $p(C,C') \perp r(a,b)$ i $c_1 \subset r(a,b)$, sledi $c_1 \perp p(C,C')$. Kako je i $c_1 \perp c$, to je

$$c_1 \perp r(c,c'), \tag{1}$$




Sl. 127.

gde je $c' = p(S,C')$ – ortogonalna projekcija prave određene ivicom $c$ na ravan $ab$. Analogno se pokazuje da je

$$a_1 \perp r(a,a'), \tag{2}$$

$$b_1 \perp r(b,b'). \tag{3}$$

Na osnovu prethodnog zadatka, ravni $aa'$, $bb'$ i $cc'$ se seku po nekoj pravoj $m$ koja prolazi kroz tačku $S$. Iz (1), (2) i (3) sledi $a_1 \perp m$, $b_1 \perp m$ i $c_1 \perp m$, pa na osnovu zadatka 3., te prave pripadaju jednoj ravni.

\# Dokazati da se tri ravni od kojih svaka sadrži simetralu jedne pljosni i normalna je na tu pljosan, seku po jednoj pravoj.

**Napomena.** Prava koja se pominje u ovom zadatku zove se *simetralna prava triedra.*

**Uputa:** Pomenuta prava predstavlja skup tačaka jednako udaljenih od svih ivica triedra.

# Zadaci za vježbu

\# Može li se triedar čije su sve pljosni pravougle - *pravougli triedar*, preseći sa ravni tako da se u preseku dobije trougao podudaran proizvoljnom, unapred datom, trouglu?

\# Dokazati da se duži određene sredinama naspramnih stranica svakog tetraedra seku se u jednoj tački koja svaku od tih duži polovi.

\# U nekom tetraedru je svaka ivica podudarna njoj naspramnoj ivici. Dokazati da za taj tetraedar važe sledeća tvrđenja:

(a) Prave određene sredinama naspramnih ivica su ose simetrije tetraedra koje se seku u jednoj tački, pri čemu je svaka normalna na ostale dve;

(b) Zbir ivičnih uglova svakog triedra tetraedra iznosi 180°;

(c) Sve pljosni tetraedra su oštrougli trouglovi.

\# Iz jednog temena pravouglog paralelepipeda povučene su dijagonale sve tri pljosni koje sadrže to teme. Dokazati da je zbir tri ugla koji su obrazovani parovima tih dijagonala jednak 180°.

\# Ako su sve pljosni tetraedra međusobno podudarni trouglovi, tada su ti trouglovi oštrougli. Dokazati.

\# Ako su svi diedri tetraedra međusobno podudarni, tada je taj tetraedar pravilan. Dokazati.

\# Ako su sve pljosni tetraedra trouglovi jednakih povšina, tada su ti trouglovi podudarni. Dokazati.

\# Neka je $A'$ proizvoljna tačka u unutrašnjosti tetraedra $ABCD$. Dokazati da je zbir ivičnih uglova kod temena $A'$, tetraedra $A'BCD$, veći od zbira ivičnih uglova kod temena $A$ tetraedra $ABCD$. Šta se može reći o zbirovima ivica tetraedara $A'BCD$ i $ABCD$?

# Upute:

\# Samo kada je dati trougao oštrougli. Neka su $A$, $B$ i $C$ tri proizvoljne tačke na ivicama $a$, $b$ i $c$ pravouglog triedra $Sabc$. Pokazaćemo da je trougao $ABC$ oštrougli. Obeležimo sa $A_1$, $B_1$ i $C_1$ ortogonalne projekcije tačke $S$ na prave $BC$, $CA$ i $AB$. Kako su trouglovi $BCS$, $CAS$ i $ABS$ pravougli, na osnovu zadatka 43(a) sledi

$$(B - A_1 - C),\ (C - B_1 - A),\ (A - C_1 - B). \tag{1}$$

S druge strane, iz $a \perp b$ i $a \perp c$ sledi $a \perp r(b, c)$, odakle je (na osnovu zadatka 1159)

$$a \perp p(B,C). \tag{2}$$

Kako je i $p(S,A_1) \perp p(B,C')$, tada na osnovu (2) dobijamo $p(B,C) \perp r(A,S,A_1)$ i prema tome – $p(B,C) \perp p(A,A_1)$. Analogno se pokazuje da je $p(C,A) \perp p(B,B_1)$, i $p(A,B) \perp p(C,C_1)$.

Iz (1) i $p(B,C) \perp p(A,A_1)$ sledi da su uglovi $ABC$ i $BCA$ oštri. (Zašto?) Analogno se pokazuje da je i ugao $CAB$ oštar. Dakle $\triangle ABC$ je oštrougli.

Pokazaćemo da u određenom smislu važi i obrnuto tvrđenje. Naime, za svaki oštrougli trougao $A_0B_0C_0$ mogu se naći redom tačke $A$, $B$, $C$ na ivicama $a$, $b$, $c$ pravouglog triedra $Sabc$, takve da je $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$.

Uočimo na ivicama $a$, $b$, $c$ redom tačke $A$, $B$ i $C$, takve da je

$$|SA| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b_0^2 + c_0^2 - a_0^2\right)},$$

$$|SB| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(c_0^2 + a_0^2 - b_0^2\right)},$$

$$|SC| = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a_0^2 + b_0^2 - c_0^2\right)},$$

gde je $a_0 = |B_0C_0|$, $b_0 = |C_0A_0|$, $c_0 = |A_0B_0|$. (Treba imati u vidu da je trougao $A_0B_0C_0$ oštrougli i da je zbog toga $b_0^2+c_0^2 > a_0^2$, $c_0^2+a_0^2 > b_0^2$, $a_0^2 + b_0^2 > c_0^2$. Iz pravouglog trougla $SAB$ dobijamo

$$|AB| = \sqrt{|SA|^2 + |SB|^2} = c_0 = |A_0B_0|.$$

Analogno se pokazuje da je $|BC| = |B_0C_0|$ i $|CA| = |C_0A_0|$, odakle sledi $\triangle ABC \cong \triangle A_0B_0C_0$.

# Uočiti četvorougao koji obrazuju sredine četiri ivice tetraedra i pokazati da je paralelogram.

# (b) Iz $|AB| = |CD|$, $|AC| = |BD|$ i $|AD| = |BC|$ sledi $\triangle ABC \cong \triangle BAD \cong \triangle DCB \cong \triangle CDA$. Ako uvedemo oznake $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$, tada je $\angle DAB = \beta$ i $\angle DAC = \gamma$, pa je

$$\angle BAC + \angle DAB + \angle DAC = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Analogno se pokazuje za ivične uglove kod ostalih temena tetraedra.

(c) S jedne strane je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, a s druge $\alpha + \beta > \gamma$ (primeniti tvrđenje zadatka 148 na triedar sa vrhom $A$). Sledi $\gamma < 90^\circ$. Analogno se pokazuje da je $\alpha < 90^\circ$ i $\beta < 90^\circ$.

\# Uočiti tetraedar koji obrazuju dijagonale pljosni paralelepipeda.

\# Pokazati da su naspramne ivice tetraedra međusobno podudarne.

\# Iskoristiti zadatak 155.

\# Kroz jednu ivicu tetraedra postaviti ravan paralelnu sa naspramnom ivicom i posmatrati ortogonalnu projekciju naspramne ivice na na uočen ravan. Pokazati da su naspramne ivice međusobno podudarne.

\# (a) Prvo ćemo pokazati da tvrđenje važi u slučaju kada tačka $A'$ pripada nekoj od ivica $AB$, $AC$, $AD$. Recimo ivici $AB$ (sl. 128(a)).

Za to je potrebno da se dokaže da važi nejednakost

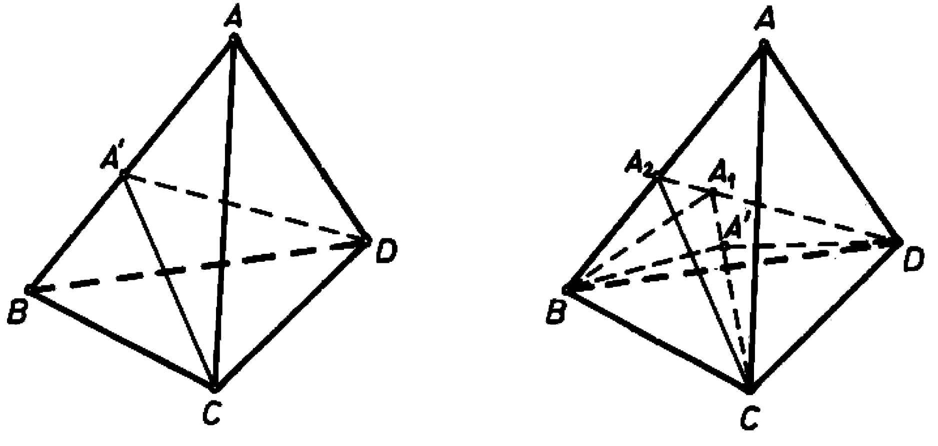
$$\angle BA'C + \angle CA'D + \angle DA'B > \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB. \quad (1)$$

Iz trouglova $AA'C$ i $AA'D$ sledi

$$\angle ACA' + \angle CA'D + \angle ADA' > \angle CAD. \quad (2)$$

Kako je $\angle CA'D = 180° - \angle A'CD - \angle A'DC$ i $\angle CAD = 180° - \angle ACD - \angle ADC$, iz (2) sledi nejednakost

$$\angle ACA' + \angle ACD + \angle ADC + \angle ADA' > \angle A'CD + \angle A'DC,$$




(a) (b)

Sl. 128.

koja je tačna, jer je $\angle ACA' + \angle ACD > \angle A'CD$ i $\angle ADC = \angle ADA' > \angle A'DC$ (zad. 148). Prema tome nejednakost (1) važi.

Razmotrimo sada opžti slučaj. Neka tačka $A'$ pripada unutrašnjosti tetraedra $ABCD$. Obeležimo sa $A_1$ presek ravni $CDA'$ i ivice $AB$, a sa $A_2$ – presek poluprave $CA'$ i duži $A_1D$ (sl. 128(b)). Iz tetraedara $A_2BCD$ i $A'BCD$ sledi

$$\angle BA'C + CA'D + \angle DA'B > \angle BA_2C + \angle CA_2D + \angle DA_2B.$$

Slično, iz tetraedara $A_1BCD$ i $A_2BCD$ sledi

$$\angle BA_2C + \angle CA_2D + \angle DA_2B > \angle BA_1C + CA_1D + \angle DA_1B,$$

dok iz tetraedara $A_2BCD$ i $A'BCD$ sledi

$$\angle BA'C + \angle CA'D + \angle DA'B > \angle BA_2C + CA_2D + \angle DA_2B.$$

Iz ove tri nejednakosti dobija se nejednakost (1).

(b) Zbir ivica tetraedra $A'BCD$ može biti i veći od zbira ivica tetraedra $ABCD$. To je, na primer, kod tetraedra $ABCD$ čiji su svi ivični uglovi kod temena $A$ pravi i kod kojeg je $|AC| = |AD| = 1$, $|AB| = 3$, ako je $A'$ tačka ivice $AB$, takva da je $|AA'| = 2$. (Proveriti.)

## SPISAK AKSIOMA

### Euklidska geometrija

#### I Aksiome incidencije (pripadanja)

$I_1$ Za svake dve tačke $A$ i $B$ postoji prava $a$ koja je incidentna i sa tačkom $A$ i sa tačkom $B$.

$I_2$ Za svake dve tačke $A$ i $B$ postoji najviše jedna prava koja je incidentna sa svakom od tačaka $A$ i $B$.

$I_3$ Za svaku pravu postoje bar dve tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

$I_4$ Za svake tri tačke $A$, $B$, $C$ koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od tačaka $A$, $B$, $C$.

Svakoj ravni je incidentna bar jedna tačka.

$I_5$ Za svake tri tačke $A$, $B$, $C$ koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od tih tačaka.

$I_6$ Ako su dve tačke prave $a$ incidentne sa ravni $\alpha$, tada je svaka tačka prave $a$ incidentna sa ravni $\alpha$.

$I_7$ Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni $\alpha$ i sa ravni $\beta$, tada postoji bar još jedna tačka koja je incidentna i sa ravni $\alpha$ i sa ravni $\beta$.

$I_8$ Postoje bar četiri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

#### II Aksiome poretka

$II_1$ Ako je $(A-B-C)$, tada su $A$, $B$ i $C$ tri različite tačke jedne iste prave i takođe je $(C-B-A)$.

$II_2$ Za svake dve tačke $A$ i $B$ postoji tačka $C$, takva da je $(A-B-C)$.

$\mathrm{II}_3$ Ako su $A$, $B$ i $C$ tri tačke jedne prave, tada važi najviše jedna od relacija: $(A-B-C)$, $(B-C-A)$, $(C-A-B)$.

$\mathrm{II}_4$ (**Pašova aksioma**) Neka su $A$, $B$, $C$ tri nekolinearne tačke i neka je $p$ prava koja je incidentna sa ravni $ABC$ i nije incidentna ni sa jednom od tačaka $A$, $B$, $C$. Ako važi relacija $(A-p-B)$, tada važi bar jedna od relacija $(B-p-C)$ i $(C-p-A)$.

## III Aksiome podudarnosti

$\mathrm{III}_1$ Za svaku polupravu $a'$ sa početnom tačkom $A'$ i svaku duž $AB$, postoji tačka $B' \in a'$, takva da je duž $AB$ podudarna sa duži $A'B'$, $[AB] \cong [A'B']$.

$\mathrm{III}_2$ Ako je $[A'B'] \cong [AB]$ i $[A''B''] \cong [AB]$, tada je $[A'B'] \cong [A''B'']$.

$\mathrm{III}_3$ Ako je $(A-B-C)$ i $(A'-B'-C')$ i ako je $[AB] \cong [A'B']$ i $[BC] \cong [B'C']$, tada je $[AC] \cong [A'C']$.

$\mathrm{III}_4$ Za svaku poluravan $\alpha'$ sa ivicom $p'$, za svaku polupravu $a' \subset p'$ sa početnom tačkom $O'$, za svaki ugao $ab$, postoji jedna i samo jedna poluprava $b' \subset a'$ sa početnom tačkom $O'$, takva da je ugao $ab$ podudaran sa uglom $a'b'$, $\angle ab \cong \angle a'b'$.

Svaki ugao je podudaran samom sebi.

$\mathrm{III}_5$ Ako za trouglove $ABC$ i $A'B'C'$ važi da je $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, tada je i $\angle CBA \cong \angle C'B'A'$.

## IV Aksiome neprekidnosti

$\mathrm{IV}_1$ (**Arhimedova aksioma**) Neka su $AB$ i $CD$ proizvoljne duži. Neka su tačke $A_1, A_2, A_3, \ldots$ incidentne sa polupravom $AB$, tako da je

$$(A-A_1-A_2), (A_1-A_2-A_3), (A_2A_3A_4), \ldots,$$

$$[AA_1] \cong [A_1A_2] \cong [A_2A_3] \cong \ldots \cong [CD].$$

Tada postoji ceo pozitivan broj $n$, takav da je $(A_1-B-A_n)$.

IV$_2$ (Kantorova aksioma) Neka je dat beskonačan niz duži, takvih da je svaka duž sadržana u prethodnoj i ne postoji duž sadržana u svim dužima niza. Tada postoji tačka koja je sadržana u svim dužima toga niza.

### V Aksioma paralelnosti

V$_E$ Za svaku pravu $a$ i svaku tačku $A$ koja nije incidentna sa pravom $a$, postoji u ravni $aA$ jedna i samo jedna prava koja je incidentna sa tačkom $A$ i ne seče pravu $a$.

## Hiperbolična geometrija (Geometrija Lobačevskog)

U hiperboličnoj geometriji su aksiome incidencije, poretka, podudarnosti i neprekidnosti iste kao u Euklidskoj geometriji. Razlika je jedino u aksiomi paralelnosti.

V$_L$ (Aksioma Lobačevskog) Za svaku pravu $a$ i svaku tačku $A$ koja nije incidentna sa pravom $a$, postoje u ravni $aA$ bar dve prave koje su incidentne sa tačkom $A$ i ne seku pravu $a$.

# Euklidski prostor (elementarni zadaci)

- zadaci posuđeni iz knjige:
Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja
učenika osnovnih škola u BiH; Šefket Arslanagić-

1. U trostranu prizmu, čija je osnova pravougli jednakokraki trougao, može se upisati lopta poluprečnika $2cm$ koja dodiruje sve strane prizme. Kolika je zapremina te prizme?

2. Iz predmeta oblika kocke istesan je pravilan tetraedar tako da su ivice (bridovi) tetraedra ujedno dijagonale strana kocke. Oodrediti:
   a) Koliko je puta smanjena površina tijela?
   b) Koliko je puta smanjena zapremina tijela?

3. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tačke $M$ i $N$ su središta ivica $AB$ i $BC$. Kako se odnose:
   a) zapremine;
   b) površine kocke i piramide $MBNB_1$?

4. Osnova prizme je romb. Omotač prizme je $2400\,\text{cm}^2$. Jedna dijagonala romba je $40\,\text{cm}$, a rastojanje naspram bočnih strana prizme jednako je visini prizme. Kolika je zapremina prizme?

5. Dijagonala kvadra ima dužinu $d = 2\sqrt{2}$. Njen nagib prema jednoj bočnoj strani iznosi $30^\circ$, a prema drugoj bočnoj strani $45^\circ$. Kolika je zapremina ovog kvadra?

6. Baza uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice $a$ i ugla pri vrhu $120^0$. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od $a$) ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?

7. Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostrana piramida ($S$ - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36cm^3$. Ako je tačka $O$ centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka $F$ središte ivice $CD$ i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zapreminu piramide $SOEFC$.

8. Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za $200\%$, a visina valjka je smanjena za $p\%$. Ako se zapremina tog valjka povećala za $p\%$, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

9. Zbir dužina prečnika baze i visine prave (uspravne) kupe je $18$. Od svih takvih kupa odrediti površinu one koja ima najveću zapreminu.

**10.** Jednakokraki trougao čiji je obim $O=64cm$, a visina na osnovicu $h_a$=24cm rotira oko kraka $b$. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela.

**11.** Data su dva jednaka pravougla jednakokraka trougla $\Delta OAB$ i $\Delta OAC$ koji pripadaju dvjema međusobno okomitim ravnima. Neka su dužine hipotenuza $OB$ i $OC$ jednake $2a$. Sa $S$ ćemo označiti središte hipotenuze $OC$, sa $H$ središte duži $OA$, a sa $M$ proizvoljnu tačku duži $OB$. Neka je $x$ dužina duži $OM$.

a) Izraziti $\overline{SM}^2$ kao funkciju od $a$ i $x$.

b) U općem slučaju ravan ($SHM$) dijeli piramidu $OABC$ na dva dijela. Izraziti odnos zapremine piramide $SOHM$ i zapremine drugog dijela kao funkciju od $a$ i $x$.

**12.** Ivica jednakoivične četverostrane piramide $SABCD$ je $a$. Tačke $A_1, B_1, C_1, D_1$ su središta bočnih ivica redom a tačka $O$ je podnožje visine piramide. Izračunaj površinu i zapreminu tijela $OA_1B_1C_1D_1S$.

**13.** Ivice $AB, AC$ i $AD$ trostrane uspravne piramide su međusobno normalne. Izračunati zapreminu piramide ako su površine strana $ABC, ACD$ i $ADB$ redom jednake $12cm^2, 16cm^2$ i $24cm^2$.

**14.** Kocka ivice $a$ presječena je jednom ravni koja sadrži dijagonalu jedne strane kocke i središta dviju ivica suprotne strane. Izračunati površinu tog presjeka.

**15.** Bočna strana pravilne trostrane piramide je nagnuta prema bazi piramide pod uglom od $60\%$. Težište baze je udaljeno od bočne strane $3cm$. Naći površinu i zapreminu piramide.

**16.** Baza (osnova) pravilne četverostrane prizme je kvadrat stranice $a$ (cm). Ravan koja sadrži jednu ivicu baze i nagnuta je prema ravni baze pod uglom od $30^\circ$, dijeli zapreminu date prizme u razmjeri $2:3$. Kolika je visina prizme?

#

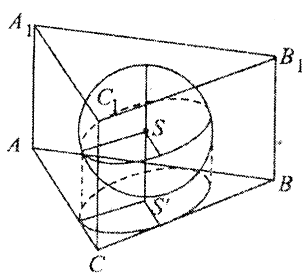
U trostranu prizmu, čija je osnova pravougli jednakokraki trougao, može se upisati lopta poluprečnika $2cm$ koja dodiruje sve strane prizme. Kolika je zapremina te prizme?

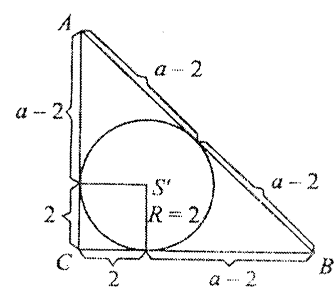
Rj. Neka je $ABCA_1B_1C_1$ trostrana prizma čija je osnova jednakokraki pravougli trougao $\Delta ABC$ ($\measuredangle C = 90^0$) u koju je upisana lopta poluprečnika $R = 2cm$ tako da dodiruje sve njene strane. Visina prizme je $H = 2R = 4cm$. Da bismo izračunali površinu baze, izračunaćemo dužine stranica $\Delta ABC$. Koristeći činjenice da je $\Delta ABC$ jednakokraki i pravougli i jednakost tangentnih duži, na osnovu Pitagorine teoreme imamo:

$$a^2 + a^2 = (2a^2 - 4)^2$$

odnosno

$$a^2 - 8a + 8 = 0 .$$




Zapišemo li posljednju jednačinu u obliku $(a-4)^2 = 8$, dobićemo da je $a = (4 + 2\sqrt{2})cm$ ili $a = (4 - 2\sqrt{2})cm$. Vrijednost $a = (4 - 2\sqrt{2})$ ne zadovoljava: hipotenuza trougla $\Delta ABC$ je $2a-4$, a $2a - 4 = 2(4 - 2\sqrt{2}) - 4 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2}) < 0$. Dakle, $a = (4 + 2\sqrt{2})cm$.

Površina baze je

$$B = \frac{(4 + 2\sqrt{2})^2}{2} cm^2 = (12 + 8\sqrt{2})cm^2 .$$

Zapremina prizme je

$$V = B \cdot H = \left(12 + 8\sqrt{2}\right) \cdot 4cm^3 .$$

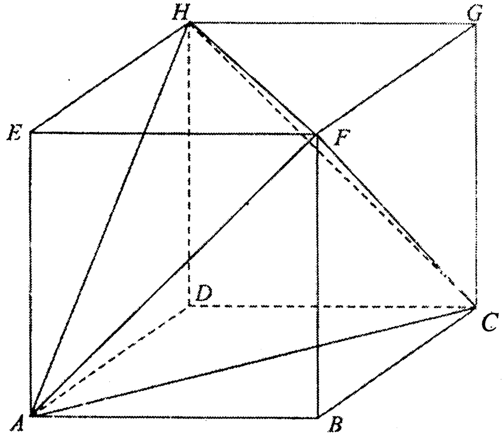
#

Iz predmeta oblika kocke istesan je pravilan tetraedar tako da su ivice (bridovi) tetraedra ujedno dijagonale strana kocke. Oodrediti:

a) Koliko je puta smanjena površina tijela?

b) Koliko je puta smanjena zapremina tijela?

R: Neka je dužina ivice kocke $ABCDEFGH$ jednaka $a_k$. Površina kocke je $P_k = 6a_k^2$, a njena zapremina je $V_k = a_k^3$. Tetraedar $ACFH$ ima ivicu dužine $a_t = a_k\sqrt{2}$. Površina tetraedra je




$$P_t = 4\frac{a_t^2\sqrt{3}}{4} = a_t^2\sqrt{3},$$

odnosno

$$P_t = \left(a_k\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3} = 2a_k^2\sqrt{3}.$$

Zapremina tetraedra je $V_t = 4\dfrac{a_t^3\sqrt{2}}{12}$,

odnosno

$$V_t = \frac{\left(a_k\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a_k^3}{3}.$$

a) Površina tijela je smanjena za

$$P_k - P_t = 6a_k^2 - 2_k^2\sqrt{3} = 2a_k^2\left(3-\sqrt{3}\right),$$

ili smanjena je

$$\frac{P_k}{P_t} = \frac{6a_k^2}{2a_k^2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ puta.}$$

b) Zapremina tijela je smanjena za

$$V_k - V_t = a_k^3 - \frac{a_k^3}{3} = \frac{2}{3}a_k^3,$$

ili smanjena je

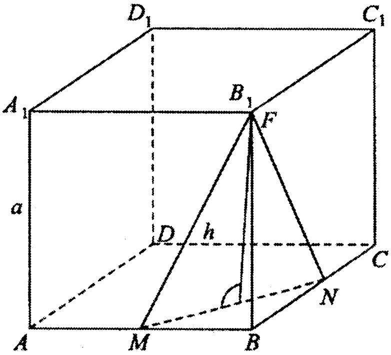
$$\frac{V_k}{V_t} = \frac{a_k^3}{\frac{a_k^3}{3}} = 3 \text{ puta.}$$

\# Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tačke $M$ i $N$ su središta ivica $AB$ i $BC$. Kako se odnose:

a) zapremine;

b) površine kocke i piramide $MBNB_1$?

Rj. Označimo dužinu ivica kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sa $a$. Tada imamo:




$$\overline{MN} = \overline{BN} = \frac{a}{2},\ \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{MB_1} = \overline{NB_1} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5},$$

$$h = \sqrt{\overline{MB_1^2} - \left(\frac{1}{2}\overline{MN}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2} = \sqrt{\frac{9}{8}a^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}.$$

a) $V_{koc.} = a^3$, $V_{pir.} = \frac{1}{3}P_{\Delta BMN} \cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a = \frac{1}{24}a^3$,

pa je $V_{koc.} : V_{pir.} = a^3 : \frac{1}{24}a^3 = 24 : 1$.

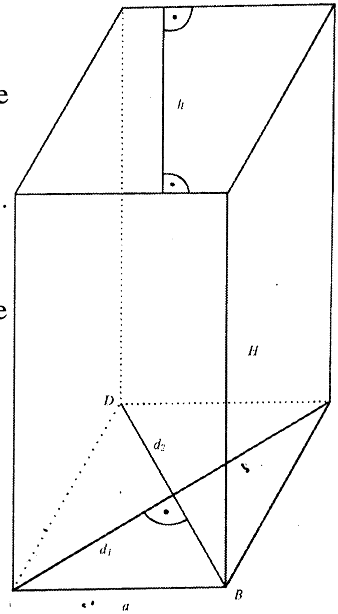
b) $P_{koc.} = 6a^2$,

$P_{pir} = P_{\Delta BMN} + P_{\Delta BMB_1} + P_{\Delta BNB_1} + P_{\Delta MNB_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a + \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a}{2\sqrt{2}} = a^2$,

pa je $P_{koc.} : P_{pir.} = 6a^2 : a^2 = 6 : 1$.

\# Osnova prizme je romb. Omotač prizme je $2400\,\text{cm}^2$. Jedna dijagonala romba je $40\,\text{cm}$, a rastojanje naspram bočnih strana prizme jednako je visini prizme. Kolika je zapremina prizme?

R. Neka je osnovna ivica prizme $a$. Tada je $M = 4aH = 2400$, pa je $a = \frac{600}{H}$. Rastojanje naspramnih bočnih strana prizme je visina $h$ romba.




Površina romba je $B = ah = h \cdot \frac{600}{H} = H \cdot \frac{600}{H}$, tj. $B = 600cm^2$ jer je $h = H$ po uslovu zadatka.

Kako je $B = \frac{d_1 d_2}{2}$, imamo $600 = \frac{40 \cdot d_2}{2}$, tj. odavde $d_2 = 30cm$.

Kako je $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 20^2 + 15^2 = 625$,

imamo $a = 25cm$, te $H = \frac{600}{a} = \frac{600}{25} = 24dm$.

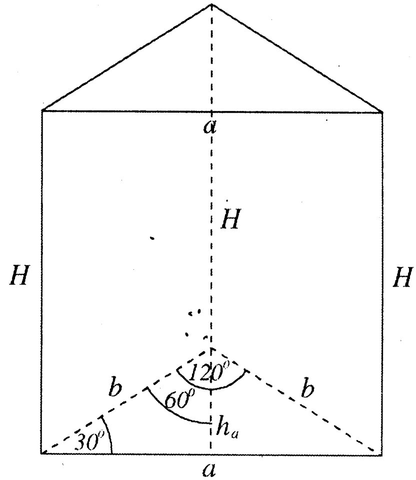
Dakle, zapremina prizme iznosi

$V = BH = 600 \cdot 24 = 14400cm^2$.

\# Dijagonala kvadra ima dužinu $d = 2\sqrt{2}$. Njen nagib prema jednoj bočnoj strani iznosi $30^\circ$, a prema drugoj bočnoj strani $45^\circ$. Kolika je zapremina ovog kvadra?

R. Ugao između prave i ravni jednak je uglu između te prave i njene projekcije na tu ravan. Zbog toga treba dijagonalu kvadra projicirati na obje bočne strane. U jednom slučaju dobijamo pravougli trougao sa uglovima $30^0$ i $60^0$, a u drugom slučaju sa uglovima $45^0$. Neka dijagonala $CE$ sa bočnom stranicom $ADHE$ zaklapa ugao od $30^0$. Tada je projekcija dijagonale $CE$ na tu stranicu duž $DE$. Trougao $\Delta DCE$ je pravougli trougao u kojem je $\measuredangle DEC = 30^0$ i $\measuredangle CDE = 90^0$. Tada je $\overline{ED} = \overline{DC}\sqrt{3} = \frac{CE\sqrt{3}}{2} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$. Neka je $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{EA} = c$. Tada je $\overline{ED} = \sqrt{b^2 + c^2}$ i $\overline{CD} = a$. Tako imamo $\sqrt{b^2 + c^2} = a\sqrt{3}$. Nakon kvadriranja imamo $b^2 + c^2 = 3a^2$. Po pretpostavci zadatka dijagonala $CE$ sa stranicom $ABFE$ gradi ugao od $45^0$. Projekcija $EC$ na tu bočnu stranicu je $EB$. Tada je trougao $\Delta EBC$ jednakokraki i pravougli, pa je $\overline{BC} = \overline{EB}$, tj. $\sqrt{a^2 + c^2} = b$. Odavde je $a^2 + c^2 = b^2$. Sada nalazimo da je $a = c$ i $b = a\sqrt{2}$. Zapremina kvadra je $V = abc = a^3\sqrt{2}$. Kako je $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, to je $a = \frac{d}{2}$. Dakle, $V = \frac{d^3\sqrt{2}}{8} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{2}}{8} = 4$.

\# Baza uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice $a$ i ugla pri vrhu $120^0$. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od $a$) ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?



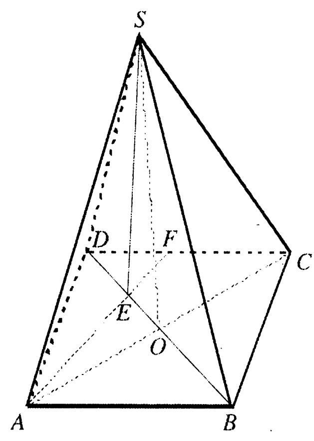

R. Neka je $b$ krak jednakokrakog trougla osnovice $a$ i visine $h_a$ koja odgovara osnovici. Tada visina baze iz vrha ugla od $120^0$ razlaže trougao na dva podudarna trougla sa uglovima od $60^0$ i $30^0$, pa je $h_a = \frac{b}{2}, \frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, tj. $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$, a odavde $h_a = \frac{b}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Sada je $$B = \frac{ah_a}{2} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}, M = 2B = \frac{a^2}{2\sqrt{3}},$$

$$M = aH + 2bH = (a+2b)H = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow \frac{a^2}{2\sqrt{3}} = \left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{\frac{a^2}{2\sqrt{3}}}{a\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{2(2+\sqrt{3})}, \quad V = B \cdot H = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{a^3}{8\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}.$$

\# Neka je $SABCD$ pravilna usparavna četverostrana piramida ($S$ - vrh piramide) čija je zapremina $V = 36 cm^3$. Ako je tačka $O$ centar osnove (baze) $ABCD$ date piramide, tačka $F$ središte ivice $CD$ i $\{E\} = AF \cap BD$, izračunati zapreminu piramide $SOEFC$.




R. Data piramida $SABCD$ i piramida $SOEFC$ imaju jednake visine pa je

$$\frac{V(SOEFC)}{V(SABCD)} = \frac{P(OEFC)}{P(ABCD)} \ (P \text{ - površina baze}).$$

Tačka $E$ je očigledno težište $\Delta ACD$ (jer su $AF$ i $DO$ njegove težišnice), pa je

$$P(OEFC) = \frac{1}{3} P_{\Delta ACD} = \frac{1}{6} P(ABCD).$$

Dakle, $$V(SOEFC) = \frac{1}{6} V(SABCD) = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 cm^3.$$

\# Poluprečnik baze (osnove) uspravnog valjka (cilindra) povećan je za $200\%$, a visina valjka je smanjena za $p\%$. Ako se zapremina tog valjka povećala za $p\%$, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

R. Označimo sa $r$ i $H$ poluprečnik baze i visinu valjka, respektivno, a sa $r_1$ i $H_1$ označimo poluprečnik baze i visinu novodobijenog valjka. Prema uvjetima zadatka imamo $r_1 = 3r$ i $H_1 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)H$, i na osnovu toga:

$$V_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)V \Leftrightarrow r_1^2\pi H_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)r^2\pi H \Leftrightarrow 9r^2\pi\left(1 - \frac{p}{100}\right)H = \left(1 + \frac{p}{100}\right)r^2\pi H$$

$$\Leftrightarrow 9\left(1 - \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow p = 80\%.$$

Označimo sa $M$ površinu omotača polaznog valjka, a sa $M_1$ površinu omotača novodobijenog valjka. Tada je

$$\frac{M_1}{M} = \frac{2r_1\pi H_1}{2r\pi H} = \frac{3r\left(1 - \frac{p}{100}\right)H}{rH} = 3\left(1 - \frac{80}{100}\right) = 0,6 .$$

Dakle, površina omotača se smanjila za $40\%$.

\# Zbir dužina prečnika baze i visine prave (uspravne) kupe je $18$. Od svih takvih kupa odrediti površinu one koja ima najveću zapreminu.

R. Koristeći $A-G$ nejednakost za tri pozitivna broja, imamo

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{\pi}{3}r \cdot r \cdot H \le \frac{\pi}{3}\left(\frac{r+r+H}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{18}{3}\right)^3 = 72\pi ,$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi kada je $r = H = 6$, tj. u tom slučaju kupa ima najveću zapreminu. Njena izvodnica ima dužinu $s = \sqrt{r^2 + H^2} = 6\sqrt{2}$, a površina joj je

$$P = r\pi(r+s) = 36\pi\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

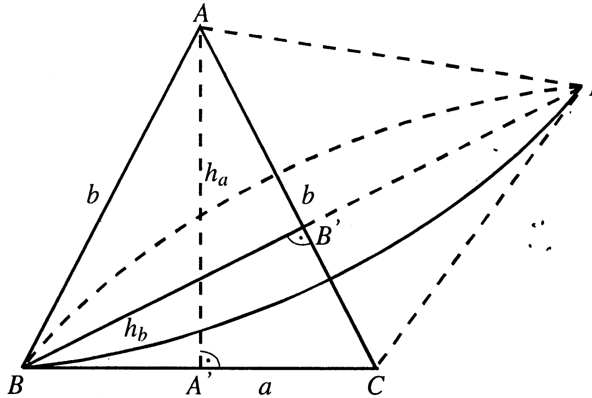
#

Jednakokraki trougao čiji je obim $O=64cm$, a visina na osnovicu $h_a$=24cm rotira oko kraka $b$. Izračunati površinu i zapreminu tako nastalog rotacionog tijela.

Rj. Obim trougla $\Delta ABC$ je $a+2b$, tj. $a+2b=64$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\Delta AA'B$ nalazimo

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ tj.}$$

$$24^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$




Sada iz sistema jednačina

$$a+2b=64,$$

$$b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 24^2,$$

nalazimo: $b=25cm$ i $a=14cm$.

Kako je $P_{\Delta ABC} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 168cm^2$ i $P_{\Delta ABC} = \frac{25 \cdot h_b}{2}$, to iz jednačine $168 = \frac{25 \cdot h_b}{2}$ nalazimo $h_b = \frac{336}{25} cm.$

Rotaciono (obrtno) tijelo sastoji se iz dvije kupe sa zajedničkom osnovom poluprečnika $r = h_b = \frac{336}{25} cm$, bočnih ivica $b=25cm$ i $a=14cm$, visina $\overline{AB'}$ i $\overline{B'C}$.

Površinu čine omotači ovih kupa i ona iznosi

$$P = M_1 + M_2 = h_b b\pi + h_b a\pi = (a+b)h_b\pi = \frac{13104}{25}\pi \ cm^2.$$

Zapremina je

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}h_b^2\pi \cdot \overline{AB'} + \frac{1}{3}h_b^2\pi \cdot \overline{B'C} = \frac{1}{3}h_b^2\pi\left(\overline{AB'} + \overline{B'C}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}h_b^2\pi b = \frac{37632}{25}\pi \ cm^3.$$

#

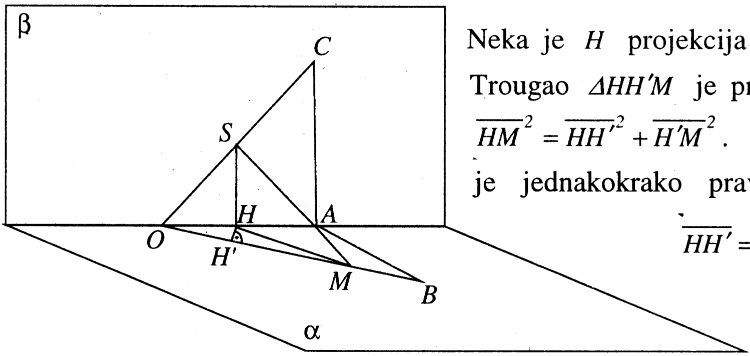
Data su dva jednaka pravougla jednakokraka trougla $\Delta OAB$ i $\Delta OAC$ koji pripadaju dvjema međusobno okomitim ravnima. Neka su dužine hipotenuza $OB$ i $OC$ jednake $2a$. Sa $S$ ćemo označiti središte hipotenuze $OC$, sa $H$ središte duži $OA$, a sa $M$ proizvoljnu tačku duži $OB$. Neka je $x$ dužina duži $OM$.

a) Izraziti $\overline{SM}^2$ kao funkciju od $a$ i $x$.

b) U općem slučaju ravan ($SHM$) dijeli piramidu $OABC$ na dva dijela. Izraziti odnos zapremine piramide $SOHM$ i zapremine drugog dijela kao funkciju od $a$ i $x$.

R. Neka su ravni $\alpha$ i $\beta$ međusobno okomite. Neka pravougli jednakokraki trougao $\Delta OAB$ pripada ravni $\alpha$ a njemu podudaran trougao $\Delta OAC$ ravni $\beta$. Trougao $\Delta SHM$ je pravougli, pa je $\overline{SM}^2=\overline{SH}^2+\overline{HM}^2$. $SH$ je srednja linija trougla $\Delta OAC$, pa je $\overline{SH}=\frac{1}{2}\overline{CA}$. Budući da je trougao $\Delta OAC$ jednakokraki pravougli, to je

$$\overline{OC}=\overline{AC}\cdot\sqrt{2} \text{ i } \overline{OA}=\overline{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{OC}=\frac{2a}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2};\ \overline{SH}=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$




Neka je $H'$ projekcija tačke $H$ na $OB$. Trougao $\Delta HH'M$ je pravougli, pa je $\overline{HM}^2=\overline{HH'}^2+\overline{H'M}^2$. Trougao $\Delta OHH'$ je jednakokrako pravougli, pa je $\overline{HH'}=\overline{OH'}=\frac{a}{2}$.

Dalje, imamo

$$\overline{H'M}=\overline{OM}-\overline{OH'}=x-\frac{a}{2}, \text{ pa je } \overline{HM}^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ i}$$

$$\overline{SM}^2=\overline{HM}^2+\overline{SH}^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=x^2-ax+a^2.$$

b) Imamo

$$V_1=\frac{1}{3}P_{\Delta OHM}\cdot\overline{SH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2x\sqrt{2}}{24} = \frac{1}{3}P_{\Delta OAB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}$$

Dakle, $V_2=V-V_1=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}-\frac{a^2x\sqrt{2}}{24}=\frac{a^2\sqrt{2}}{24}(8a-x)$ i $V_1:V_2=x:(8a-x)$.

Ivica jednakoivične četverostrane piramide $SABCD$ je $a$. Tačke $A_1, B_1, C_1, D_1$ su središta bočnih ivica redom a tačka $O$ je podnožje visine piramide. Izračunaj površinu i zapreminu tijela $OA_1B_1C_1D_1S$.

R: Tijelo $OA_1B_1C_1D_1S$ je oktaedar. Visina bočne strane, tj. visina jednakostraničnog trougla je

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Visina piramide je

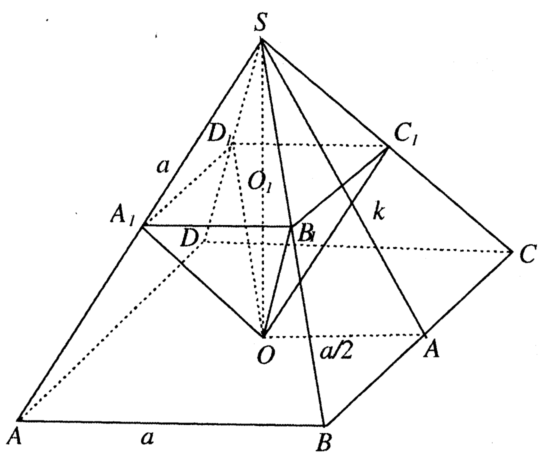
$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Površina oktaedra je

$$P_{okt.} = 8\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2},$$

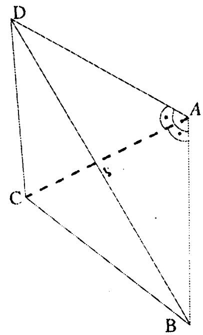
a zapremina

$$V_{okt.} = 2\cdot V_{A_1B_1C_1D_1S} = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$



\# Ivice $AB, AC$ i $AD$ trostrane uspravne piramide su međusobno normalne. Izračunati zapreminu piramide ako su površine strana $ABC, ACD$ i $ADB$ redom jednake $12cm^2, 16cm^2$ i $24cm^2$.

R.) Neka je $ABCD$ uspravna trostrana piramida kod koje su ivice $AB, AC$ i $AD$ uzajamno normalne i površine strana su




$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 12cm^2; \qquad P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD} = 16cm^2,$$

$$P_{\Delta ADB} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD} = 24cm^2.$$

Zapremina piramide je

$$V = \frac{1}{3}B\cdot H = \frac{1}{3}\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{6}\sqrt{\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2\cdot\overline{AD}^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{8\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{2}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{8\cdot 12\cdot 16\cdot 24}cm^2 =$$

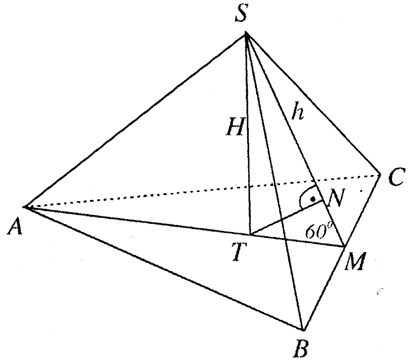
$$= \frac{1}{6}\cdot\sqrt{2^3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2^4\cdot 3\cdot 2^3}cm^2 = \frac{1}{6}\sqrt{2^{12}\cdot 3^2}cm^2 = \frac{1}{6}\cdot 2^6\cdot 3cm^2 = 2^5cm^2 = 32cm^2.$$

\# Kocka ivice $a$ presječena je jednom ravni koja sadrži dijagonalu jedne strane kocke i središta dviju ivica suprotne strane. Izračunati površinu tog presjeka.

R.) Neka je presjek kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sa datom ravni jednakokraki trapez $BC_1NM$, gdje su $M$ i $N$ redom središta ivica $A_1D_1$ i $A_1A$. Osnovice trapeza su $\overline{BC_1} = a\sqrt{2}$ i $\overline{MN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, a kraci $\overline{BM} = \overline{C_1N}$.

Imamo $\overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AN}^2 = \frac{5a^2}{4}$ i visina trapeza je $h = \sqrt{\overline{BM}^2 - \overline{BP}^2} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$, jer je $\overline{BP} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC_1} - \overline{MN}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Površina trapeza je $P = \frac{9a^2}{8}$.

Bočna strana pravilne trostrane piramide je nagnuta prema bazi piramide pod uglom od $60\%$. Težište baze je udaljeno od bočne strane $3cm$. Naći površinu i zapreminu piramide.




R: Baza date piramide je jednakostranični trougao $\Delta ABC$, dok omotač sačinjavaju tri podudarna jednakokraka trougla. Dato rastojanje baze od bočne strane je duž $TN$, gdje $N$ leži na visini bočne strane. Uočimo da je pravougli trougao $\Delta MNT$ polovina jednakostraničnog trougla, pa je $\overline{MT} = 2\overline{MN}$.

Prema Pitagorinoj teoremi imamo

$$\overline{MT}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NT}^2 \Rightarrow \overline{MT}^2 = \frac{1}{4}\overline{MT}^2 + 3^2 \Rightarrow \frac{3}{4}\overline{MT}^2 = 9 \qquad \Rightarrow \overline{MT}^2 = 12 \Rightarrow \overline{MT} = 2\sqrt{3}.$$

Zbog toga je $\overline{AM} = 3\overline{MT} = 6\sqrt{3}$. $AM$ je visina trougla $\Delta ABC$, dakle, vrijedi

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 6\sqrt{3} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = a = 12cm.$$

Dakle,

$$B = P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}cm^2.$$

Uočimo da je i pravougli trougao $\Delta SMT$ polovina jednakostraničnog trougla i da je $\overline{SM} = 2\overline{MT}$. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao $\Delta SMT$ imamo:

$$\left(2\overline{MT}\right)^2 - \overline{MT}^2 = \overline{ST}^2 = H^2 \Rightarrow H^2 = 3\overline{MT}^2 = 36 \Rightarrow H = 6cm$$

pa možemo izračunati zapreminu date piramide $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 6 = 72\sqrt{3}cm^3$.

Dalje, površina omotača piramide je

$$M = 3 \cdot P_{\Delta BCS} = 3 \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{SM}}{2} = 3 \cdot \frac{a \cdot 2\overline{MT}}{2} = 3a \cdot \overline{MT} = 3 \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3},$$

$$M = 72\sqrt{3}cm^2.$$

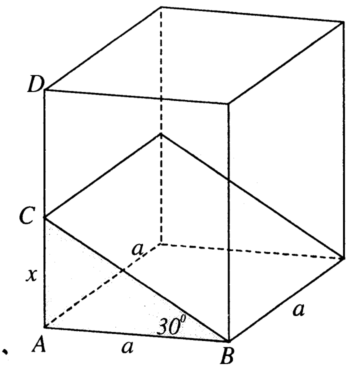
Površina piramide je $P = B + M = 108\sqrt{3}cm^2$.

\# Baza (osnova) pravilne četverostrane prizme je kvadrat stranice $a$ (cm). Ravan koja sadrži jednu ivicu baze i nagnuta je prema ravni baze pod uglom od $30^\circ$, dijeli zapreminu date prizme u razmjeri $2:3$. Kolika je visina prizme?

R:

Manji odsječak date prizme je trostrana prizma čija je visina i jedna ivica baze dužine $a$, a druga ivica baze, kateta trougla $\Delta ABC$ je $\overline{AC} = x$. Trougao $\Delta ABC$ je polovina jednakostraničnog trougla (jer je $\measuredangle ACB = 60^0$) pa je $\overline{AB} = a$ visina tog trougla a baza mu je $2x$. Zbog toga je:

$$a = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$




Zapremina ove trostrane prizme je: $V_1 = \frac{1}{2} a \cdot x \cdot a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. Zapremina date prizme je $V = a^2 H$, gdje je $H$ visina čija se dužina traži. Prema uvjetu zadatka, zapremina trostrane prizme čini $\frac{2}{5}$ zapremine date prizme, tj.

$$V_1 = \frac{2}{5} V \Rightarrow \frac{a^3}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{5} a^2 H \Rightarrow H = \frac{5a}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{12} cm.$$